Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ДОРОНИН

# НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 X 1949)*

В этой заметке мы приводим несколько результатов, аналогичных полученным С. М. Никольским в его работах [1,2].

1. Пусть $S_n(f, x)$ обозначает сумму Фурье порядка $n$ функции $f(x)$ периода $2\pi$ и пусть $KW^{(r)}$ — класс функций периода $2\pi$, имеющих производную порядка $r$, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant K.$$

А. Н. Колмогоров [3] показал, что

$$\sup_{f\in KW^{(r)}} |f(x)-S_n(f, x)| = \frac{4}{\pi^2}\frac{K\log n}{n^r}+O(n^{-r}). \tag{1}$$

При этом оказалось, что функция, для которой эта верхняя грань асимптотически достигается, существенно зависит от $n$.

С другой стороны, мы показываем:

Теорема 1. *Существует функция $f_*(x)$, принадлежащая классу $KW^{(r)}$ (не зависящая от $n$), для которой имеет место неравенство*

$$|f_*(x)-S_n(f_*, x)| > \frac{4}{\pi^2}(1-\varepsilon_n)\frac{K\log n}{n^r},$$

*где $\varepsilon_n\to 0$ для некоторой подпоследовательности индексов $n$.*

Из теоремы 1 и равенства Колмогорова (1) вытекает:

Следствие. *Для любой функции $f\in KW^{(r)}$ справедливо неравенство*

$$\limsup \frac{n^r}{\log n}|f(x)-S_n(f, x)| \leqslant \frac{4K}{\pi^2},$$

*правая часть которого не может быть уменьшена.*

При доказательстве теоремы 1 я в общем следовал методу, примененному С. М. Никольским в [1, 2].

Функция $f_*(x)$, о которой идет речь в теореме 1, определена следующим образом.

Положим:

$$V_k = \exp\left\{A\left(2+\frac{|\ln a_k|}{\pi}\right)\right\}^{\mu}; \quad 1<\mu<\infty; \quad n_k=[V_k];$$

$$a_0 = \pi; \quad a_k = \frac{1}{n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$D_{n_k}(t) = \frac{\sin\left[\left(n_k - \frac{1}{2}\right)t + \frac{r\pi}{2}\right]}{2\sin\frac{t}{2}},$$

и пусть $\beta_k$ есть ближайший слева от точки $a_{k-1}$ нуль функции $D_{n_k}(t)$ и $\alpha_k$ — ближайший справа от точки $a_k$ нуль той же функции, обладающий тем свойством, что между $\alpha_k$ и $\beta_k$ содержится нечетное число нулей функции $D_{n_k}$.

Производная $r$-го порядка функции $f_*(x)$ есть периодическая периода $2\pi$ четная функция, определяемая на интервале $(0, \pi)$ равенствами:

$$f_*^{(r)}(x) = 0 \qquad \text{для} \qquad a_k \leqslant x < \alpha_k;$$
$$f_*^{(r)}(x) = \operatorname{sign} D_{n_k}(x) \qquad \text{для} \qquad \alpha_k \leqslant x < \beta_k;$$
$$f_*^{(r)}(x) = 0 \qquad \text{для} \qquad \beta_k \leqslant x \leqslant a_{k-1};$$
$$f_*^{(r)}(0) = 0.$$

2. Пусть $KH^{(\alpha)}$ — класс функций периода $2\pi$, удовлетворяющих условию Липшица степени $\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ с константой $K$, и $S_n(f, x)$ — сумма Фурье порядка $n$ функции $f(x)$.

Теорема 2. *Существует функция $f \in KH^{(\alpha)}$ (не зависящая от $n$), для которой*

$$|f(x) - S_n(f, x)| > \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{K \log n}{n^\alpha}(1 - \varepsilon_n) \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt,$$

*где $\varepsilon_n \to 0$, для некоторой подпоследовательности индексов $n$.*

Из этой теоремы и асимптотического равенства С. М. Никольского ([4], стр. 12) вытекает:

Следствие. *Для любой функции $f \in KH^{(\alpha)}$ справедливо неравенство:*

$$\limsup \frac{n^\alpha}{\log n} |f(x) - S_n(f, x)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} K \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt,$$

*правая часть которого не может быть уменьшена.*

3. Пусть

$$\tilde{S}_n(f, x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(x - x_k^{(n)}\right)}{2\sin\frac{x - x_k^{(n)}}{2}},$$

$$x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

есть интерполяционная сумма функции $f(x)$ порядка $n$ и $KH^{(\alpha)}$ по-прежнему обозначает класс функций периода $2\pi$, удовлетворяющих условию Липшица степени $\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in KH^{(\alpha)}$ справедливо неравенство*

$$\limsup \frac{n^\alpha}{\log n} |f(x) - \tilde{S}_n(f, x)| \leqslant \mu^{(\alpha)},$$

$$\mu^{(\alpha)} = \left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right| \frac{K}{\pi^{1-\alpha}},$$

*правая часть которого не может быть уменьшена.*

В теоремах 1, 2 и 3 константа $\mu^{(\alpha)}$ имеет аналогичное происхождение, именно, она фигурирует в асимптотическом равенстве С. М. Никольского ((4), стр. 45)

$$\sup_{f\in KH^{(\alpha)}} |f(x)-\tilde{S}_n(f,x)| \approx \mu^{(\alpha)}\frac{\log n}{n^\alpha} \quad (n\to\infty).$$

4. Явление, описанное в теоремах 1—3, не имеет места, если отклонение функции $f(x)$ от ее приближения рассматривать в метрике $L$ или в метрике $L^{(2)}$.

Рассмотрим случай сумм Фурье.

Пусть $W^{(r)}LK$ — класс функций периода $2\pi$, имеющих суммируемую производную $r$-го порядка, удовлетворяющую неравенству

$$\|f^{(r)}\|_L=\int\limits_0^{2\pi}|f^{(r)}(x)|\,dx\leqslant K.$$

Тогда, с одной стороны ((5), стр. 218),

$$\sup_{f\in W^{(r)}LK}\|f-S_n(f)\|_L=\sup_{f\in W^{(r)}LK}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)-S_n(f,x)|\,dx\approx$$

$$\approx\frac{4K}{\pi^2}\frac{\log n}{n^r}\quad(n\to\infty),$$

а с другой, для любой функции $f\in W^{(r)}LK$ имеет место

$$\|f-S_n(f)\|_L=o\left(\frac{\log n}{n^r}\right)\quad(n\to\infty),\tag{2}$$

что дает:

$$\lim_{n\to 0}\sup\frac{n^r}{\log n}\|f-S_n(f)\|_L=0.$$

Аналогичное обстоятельство имеет место и для наилучших приближений.

В самом деле, обозначим через $E_n(f)_L$ наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике $L$ при помощи тригонометрического полинома порядка $n$.

Тогда, с одной стороны ((5), стр. 241),

$$\sup E_n(f)_L=\frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+1)s}}{(2s+1)^{r+1}}\frac{K}{n^r}=\frac{A_rK}{n^r},$$

а с другой:

$$E_n(f)_L=o\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad(n\to\infty),$$

и, таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sup n^rE_n(f)_L=0.$$

5. Если обозначить через $W^{(r)}L^{(2)}K$ класс функций периода $2\pi$, имеющих производную порядка $r$ с интегрируемым квадратом, удовлетворяющую неравенству

$$\|f^{(r)}\|_{L^{(2)}}=\left(\int\limits_0^{2\pi}|f^{(r)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\leqslant K,$$

то

$$\sup_{f \in W^{(r)}L^{(2)}K} E_{n-1}(f)_{L^{(2)}} = \sup_{f \in W^{(r)}L^{(2)}K} \|f - S_{n-1}(f)\|_{L^{(2)}} = \frac{K}{n^r}$$

и в то же время

$$E_{n-1}(f)_{L^{(2)}} = o(n^{-r}) \quad (n \to \infty),$$

откуда

$$\lim_{n \to \infty} \sup n^r E_{n-1}(f)_{L^{(2)}} = 0.$$

Поступило
16 VIII 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 393 (1946). [2] С. М. Никольский, там же, 10, 295 (1946). [3] А. Колмогоров, Ann. Math., 36 (1935). [4] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 15, 1 (1945). [5] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 207 (1946).