Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Ш. АЛЬТМАН

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 X 1949)

Пусть H — сепарабельное пространство Гильберта. Следуя Н. К. Бари (1), будем говорить, что последовательность $\{f_i\}$, образующая вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему в H, является системой Бесселя, если ряд $\sum_1^\infty |(x, g_i)|^2 < \infty$ при любом $x \in H$. Далее, последовательность $\{f_i\}$ является системой Гильберта, если для любой последовательности чисел $\{a_i\}$, для которой $\sum_1^\infty |a_i|^2 < \infty$, существует элемент $x \in H$, удовлетворяющий условию $(x, g_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Система Бесселя, являющаяся в то же время системой Гильберта, называется системой (базисом) Рисса.

Базисом Бесселя будем называть базис в H, являющийся системой Бесселя. Аналогично будем называть базисом Гильберта базис в H, который является системой Гильберта. Как известно, если $\{f_i\}$ — базис Бесселя, образующий вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему, то $\{g_i\}$ — базис Гильберта.

Н. К. Бари поставила вопрос о том, не будет ли всякий базис в пространстве L^2 базисом Рисса. Эту проблему решил К. И. Бабенко (2), построив базис в L^2, который не является базисом Рисса. Однако базис, построенный К. И. Бабенко, является базисом Бесселя. Как это показано в моей заметке (3), базисы Бесселя очень тесно связаны с базисами Рисса, они в некотором смысле «близки» к последним, т. е. удовлетворяют следующему функциональному неравенству:

$$\sup_n \left\| \sum_1^n (x, g_i)(\varphi_i - f_i) \right\| \leqslant M \| x \|,$$

где $\{\varphi_i\}$ — произвольный, но наперед заданный базис Рисса, $\{f_i\}$ — базис Бесселя, образующий вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему, а M — некоторая константа.

Естественно возникает вопрос о том, существуют ли в пространстве L^2 базисы, которые не являются ни базисами Бесселя, ни базисами Гильберта. Дать положительный ответ на поставленный вопрос и является целью настоящей заметки. Следует отметить, что исходной точкой для построения искомого базиса служит базис, построенный К. И. Бабенко.

Заметим, что если $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ — биортогональная система в H, причем обе последовательности полны, и если $i_1 < i_2 < \ldots i_n < \ldots$

произвольная последовательность целых чисел, то элементы f_{i_k} первой последовательности можно заменить элементами g_{i_k}, заменяя также элементы g_{ik} второй последовательности элементами f_{ik}; таким образом получим новую биортогональную систему с двумя полными последовательностями.

Пусть теперь $\{f_i\}$ — базис в H, образующий вместе с последовательностью $\{g_i\}$ биортогональную систему, и пусть $\{f_{ik}\}$ — некоторая подпоследовательность. Обозначим через I_1 замкнутую линейную оболочку над элементами f_{i_k}, а через I_2 — замкнутую линейную оболочку над остальными элементами базиса. Если последовательность $\{f_{i_k}\}$ обладает тем свойством, что всякий элемент x пространства может быть представлен в виде суммы $x = y + z$, где $y \in I_1$, $z \in I_2$, то элементы f_{i_k} можно заменить элементами g_{i_k} и таким образом получим новый базис $\{h_i\}$, где $h_i = f_i$ для $i \neq i_k$, $h_i = g_i$ для $i = i_k$.

В самом деле, $x = \sum\limits_1^\infty (x, g_i) f_i = \sum\limits_1^\infty (y, g_{i_k}) f_{i_k} + \sum\limits_1^\infty (z, g_i) f_i$, причем во второй сумме коэффициенты с индексами $i = i_k$ равны нулю. Так как $\{g_{i_k}\}$ — базис в I_1, то первую сумму можно заменить суммой $\sum\limits_1^\infty (y, f_{i_k}) g_{i_k}$, и получим, что $x = \sum\limits_1^\infty c_i h_i$, где $c_{i_k} = (y, f_{i_k})$; $c_i = (z, g_i)$ для $i \neq i_k$.

Обратимся теперь к построенному К. И. Бабенко примеру базиса Бесселя в пространстве L^2, который имеет следующий вид:

$$|x|^{-\alpha} e^{-inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < {}^1/_2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Этот базис напишем в другом виде, более удобном для нашей цели:

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots$$

$$\ldots, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin mx, \ldots \tag{1}$$

Очевидно, что сопряженная последовательность имеет следующий вид:

$$\frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots$$

$$\ldots, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin mx, \ldots \tag{2}$$

Переставляя местами первые и четные элементы последовательностей, получим новую биортогональную систему:

$$\frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots$$

$$\ldots, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \sin mx, \ldots \tag{3}$$

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ldots$$

$$\ldots,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin mx,\ldots \tag{4}$$

Легко видеть, что подпоследовательность

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ldots,\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ldots \tag{5}$$

обладает вышеуказанным свойством.

В самом деле, всякая функция $f(x)\in L^2$ может быть представлена в виде суммы двух функций, четной и нечетной:

$$f(x)=p(x)+q(x);\quad p(x),\ q(x)\in L^2,$$

следовательно,

$$|x|^{\alpha}f(x)=|x|^{\alpha}p(x)+|x|^{\alpha}q(x).$$

Функция $|x|^{\alpha}p(x)$ также четная, поскольку $p(x)$ — четная функция. Отсюда следует, что ряд Фурье для функции $|x|^{\alpha}p(x)$ содержит только члены с косинусами. Аналогично убеждаемся, что ряд Фурье для функции $|x|^{\alpha}q(x)$ содержит только члены с синусами, следовательно, за исключением первых коэффициентов, равны нулю: нечетные коэффициенты разложения функции $p(x)$ и четные коэффициенты разложения функции $q(x)$ по базису (1).

Таким образом, функция $p(x)$ принадлежит замкнутой линейной оболочке над элементами подпоследовательности (5), а функция $q(x)$ — замкнутой линейной оболочке над остальными (т. е. нечетными) элементами базиса. На основании предыдущего замечания последовательность (2) является базисом в пространстве L^2.

Осталось показать, что базис (3) не является ни базисом Бесселя, ни базисом Гильберта.

В том, что базис (3) не является базисом Бесселя, мы убедимся, взяв четную функцию $p(x)\in L^2$ такую, чтобы функция $|x|^{-\alpha}p(x)$ не была интегрируема с квадратом. В качестве такой функции достаточно взять функцию $p(x)=|x|^{-\beta}$, $1/2-\alpha\leqslant\beta<1/2$. Очевидно, что ряд, составленный из квадратов коэффициентов разложения функции $p(x)$ по базису (3), расходится.

Вместо того чтобы показать, что базис (3) не является базисом Гильберта, покажем, что сопряженный базис (4) также не является базисом Бесселя. Для этого возьмем нечетную функцию $q(x)\in L^2$ такую, чтобы функция $|x|^{-\alpha}q(x)$ не была интегрируема с квадратом. Например, функция $q(x)=\operatorname{sign}x\,|x|^{-\beta}$ удовлетворяет всем этим требованиям, следовательно, ряд, составленный из квадратов ее коэффициентов разложения по базису (4), расходится.

Поступило
5 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Бари, ДАН, 54, № 5 (1946). [2] К. И. Бабенко, ДАН, 62, № 2 (1948).
[3] М. Ш. Альтман, ДАН, 67, № 3 (1949).