Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. И. ЕЛЬШИН

МЕТОД ФАЗ И КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД СРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 VIII 1949)

1. Гладкое частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{1}$$

отличное от $x \equiv 0$ на интервале

$$a < t < b, \tag{2}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ непрерывны, может иметь только изолированные корни и при прохождении через каждый из них меняет знак.

Проблема колебаний, поставленная Штурмом в 1833 г. [1], состоит в разбиении на части функционального пространства

$$R \equiv \{p, q\} \tag{3}$$

всех дифференциальных уравнений (1) с непрерывными на (2) коэффициентами по числу корней частного решения (1) с фиксированными при $t = t_0$ $(a < t_0 < b)$ начальными условиями на интервале (2).

Предложенный Штурмом метод сравнения, на различных модификациях которого и до настоящего времени основывается получение отдельных результатов, связанных с проблемой, не дает даже принципиальной возможности полного ее решения.

В этой статье я получаю полное решение проблемы колебаний, основанное на изучении функций, определяемых введенным мною в статье [2] характеристическим оператором:

$$J[\theta; (p, q)] = \left(\theta - \frac{p}{2}\right)' + \theta^2 + q - \frac{p^2}{4} \tag{4}$$

при любых допустимых θ, непрерывных на интервале (2) [4] и допускающих на нем непрерывную производную для $\theta - \frac{p}{2}$.

2. Если точкам (p_1, q_1) и (p_2, q_2) соответствуют характеристические операторы

$$J_1 = J[\theta; (p_1, q_1)], \quad J_2 = J[\theta; (p_2, q_2)], \tag{5}$$

определенные для одних и тех же допустимых θ, для множества

$$\begin{gathered} p_\alpha = p_1 + \alpha(p_2 - p_1); \\ q_\alpha - \frac{p_\alpha^2}{4} = q_1 - \frac{p_1^2}{4} + \alpha\left[\left(q_2 - \frac{p_2^2}{4}\right) - \left(q_1 - \frac{p_1^2}{4}\right)\right] \end{gathered} \tag{6}$$

характеристический оператор имеет вид:

$$J_\alpha = J[\theta; (p_\alpha, q_\alpha)] = J_1 + \alpha [J_2 - J_1]. \tag{7}$$

Представляя общее решение дифференциального уравнения

$$x''_\alpha + p_\alpha x'_\alpha + q_\alpha x_\alpha = 0 \tag{8}$$

в виде

$$x = \frac{c_1 \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p\, d\xi\right]}{\sqrt{|\omega|}} \cos\left[\int\limits_{t_0}^{t} \omega\, d\xi + c_3\right], \tag{9}$$

для получения множества частот имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega'_\alpha}{\omega_\alpha} + 2\theta\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega'_\alpha}{\omega_\alpha}\right)^2 + \omega_\alpha = J_\alpha - \theta^2. \tag{10}$$

Квазидифференциальное уравнение (10) можно заменить системой:

$$z'' = \frac{1}{2}(z' - 2\theta)^2 - 2\omega_\alpha^2 + 2J_\alpha - 2\theta^2, \quad \omega'_\alpha = (z' - 2\theta)\,\omega_\alpha \tag{11}$$

с непрерывными правыми частями, из которой вариация $\delta\omega_\alpha$ получается ([3]) формальным варьированием системы (11), т. е. дифференцированием ее по параметру α и интегрированием полученной системы уравнений в вариациях:

$$\left(\frac{\delta z'}{\omega_\alpha}\right)' + 4\omega_\alpha\,\delta z = \frac{2\,(J_2 - J_1)\, d\alpha}{\omega_\alpha}, \qquad \delta\omega_\alpha = \omega_\alpha \delta z. \tag{12}$$

Интегрируя систему (12) в предположении независимости от α начальных условий частоты ω_α при $t = t_0$:

$$\delta\omega_\alpha\big|_{t=t_0} = \delta\omega'_\alpha\big|_{t=t_0} = 0, \tag{13}$$

найдем

$$\delta\omega_\alpha = \omega_\alpha\, d\alpha \int\limits_{t_0}^{t} \frac{J_2 - J_1}{\omega_\alpha} \sin 2\int\limits_{s}^{t} \omega_\alpha\, d\xi\, ds. \tag{14}$$

Интегрирование (14) по t в пределах от t_0 до t и по α от 0 до 1 приводит к закону фаз:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \omega_1 d\xi - \int\limits_{t_0}^{t} \omega_0 d\xi = \int\limits_{0}^{1} d\alpha \int\limits_{t_0}^{t} \frac{J_2 - J_1}{\omega_\alpha} \sin^2 \int\limits_{s}^{t} \omega_\alpha\, d\xi\, ds, \tag{15}$$

частный случай которого для $\theta = 0$ был получен мною в 1937 г. ([4])

Если для уравнений (1) с характеристическими операторами (5) последние на всем интервале $t_0 \leqslant t < b$ $(a < t_1 \leqslant t_0)$ удовлетворяют условиям:

$$J_2 - J_1 \geqslant 0, \quad J_2(t_1) > J_1(t_1), \quad t_0 < t_1 < b \quad (a < t_1 < t_0), \tag{16}$$

то на замыкании интервала $t_1 \leqslant t < b$ $(a < t \leqslant t_1)$ абсолютная величина фазы с одними и теми же начальными условиями при $t = t_0$ больше для того уравнения, характеристический оператор которого больше.

3. Рассмотрим в качестве многообразия сравнения $J \equiv 0$ (при любом, допустимом для $J_2 = J$, θ). Тогда, вводя обозначения

$$K = \exp\left[2\int\limits_{t_0}^{t} \theta\, d\xi\right], \quad G = J \cdot K, \tag{17}$$

для ω_0 получим

$$\omega_0 = \frac{AK^{-1}}{\left(A + B\int_{t_0}^{t} K^{-1}\,d\xi\right)^2 + \left(\int_{t_0}^{t} K^{-1}\,d\xi\right)^2}, \tag{18}$$

где $A \neq 0$ и B — постоянные, определяемые из начальных условий ω_0.

Из формулы (15) можно сделать следующие выводы:

1°. Для того чтобы уравнение (1) на интервале (2) не имело полуволны, необходимо и достаточно существование допустимого θ, при котором характеристический оператор (5) дает функцию, неположительную на всем интервале (2).

2°. Для того чтобы уравнению (1) соответствовали интервалы, на которых существуют полуволны (соответственно правая и левая), необходимо и достаточно наличие среди допустимых θ, удовлетворяющих условиям

$$\left|\int_{t_0}^{c} K^{-1}\,d\xi\right| = \infty \quad (c = a \text{ и } c = b), \tag{19}$$

такого, чтобы характеристический оператор (4) определял функцию неотрицательную на интервале (2).

3°. Для того чтобы абсолютная величина фазы с данными при $t = t_0$ начальными условиями вправо (влево) от $t = t_0$ была заключена между пределами m и M:

$$m < \left|\int_{t_0}^{t} \omega\,d\xi\right| < M, \tag{20}$$

необходимо и достаточно наличие среди допустимых θ, удовлетворяющих (19), соответственно при $c = b$ или $c = a$, обеспечивающих неравенство:

$$\left(\frac{4m^2}{\pi^2} - 1\right)\omega_0^2 \leqslant J[\theta; (p, q)] \leqslant \left(\frac{4M^2}{\pi^2} - 1\right)\omega_0^2, \tag{21}$$

где ω_0 определяется по формуле (18).

4°. Для того чтобы вправо (влево) от $t = t_0$ решения уравнения (1) на интервале (2) совершали счетное множество колебаний, необходимо и достаточно существование допустимой функции θ, при которой выполняются условия 2° (при $c = b$ или при $c = a$), дополненные условием:

$$\left|\int_{t_0}^{c} G\,d\xi\right| = \infty, \quad c = b \ (c = a). \tag{22}$$

4. Теорема 4° доказывается по следующей схеме. Так как при $\theta = -\omega'/2\omega$ из

$$\left|\int_{t_0}^{c} \omega\,d\xi\right| = \infty, \quad c = b \ (c = a) \tag{23}$$

вытекают условия 4° для соответствующего интервала, эти условия необходимы. Для доказательства достаточности условий 4° предположим, что при их выполнении интеграл в левой части (23) сходящийся.

Из этого предположения и (15) вытекает существование $t = t_1$, при котором для всех α и всех t: $t_1 < t < b$ $(a < t < t_1)$

$$\left|\int_{t_1}^{t} \omega_\alpha\,d\xi\right| < \frac{\pi}{4}. \tag{24}$$

Записав (15) для $t_0 = t_1$ и заменив, соответственно с этим, A и B в выражении ω_0, из

$$\delta \int_{t_1}^{t} \frac{J}{\omega_\alpha} \sin^2 \int_{s}^{t} \omega_\alpha \, d\xi \, ds > 0, \tag{25}$$

справедливого для (24), убеждаемся, что замена в формуле (15) $(t_0 = t_1)$ ω_α на ω_0 дает:

$$\int_{t_1}^{c} \omega \, d\xi - \int_{t_1}^{c} \omega_0 \, d\xi > \int_{t_1}^{c} G \cdot \left[A + B \int_{t_1}^{s} K^{-1} d\xi \right]^2 ds, \quad c = b \ \ (c = a). \tag{26}$$

В силу (22) и (19) интеграл, стоящий в правой части (26), расходится. Полученное противоречие доказывает теорему.

5. Чтобы показать, насколько эффективны полученные результаты, заметим, что при каждом допустимом θ, приводящем к выполнению одного из условий 1°, 2°, 3° или 4°, получается соответствующее достаточное условие. Так, при $b = \infty$ и существовании инварианта для счетного множества колебаний при $\theta = 0$ получаем обобщение классического условия $J \geqslant \varepsilon > 0$; при $\theta = -1/2t$ получается обобщение условия Кнезера. Полагая $\theta = \frac{p}{2} + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{p^2}{4} - q + \psi \right) d\xi$, где ψ — произвольная, непрерывная и неотрицательная на интервале (2) функция, из 4° найдем:

$$\left| \int_{t_0}^{c} K^{-1} d\xi \right| = \infty, \quad \left| \int_{t_0}^{c} (\psi + \theta^2) K \, d\xi \right| = \infty, \quad c = b \ \ (c = a). \tag{27}$$

Одновременная расходимость интегралов (27), как условие счетного множества колебаний решений (1), дает ряд новых эффективных результатов. Однако, подобно тому как в обычных геометрических местах никогда не ставится задача: „выписать координаты всех точек, им принадлежащих", так и для многообразий функционального пространства (3), которые определяются 1°, 2°, 3° или 4°, задача колебаний решается выяснением принадлежности или непринадлежности конкретной точки, определяющей уравнение (1), к одному из этих многообразий.

В противоположность методу фаз, классический метод сравнения, исходя из сравнения уравнений с одинаковым характером колебаний, вынужден ограничиваться набором достаточных условий, который никогда не сможет исчерпать всех возможностей.

Сравнение расстояний между корнями (полуволн), практикуемое в этом методе, вместо сравнения фаз еще усложняет задачу сравнения, ибо, если даже сравнивать заданное уравнение (1) с уравнением $(Ky')' + y/K = 0$ при любом θ, фаза которого вычисляется непосредственно, для применения классической теоремы Штурма, выраженной в терминах полуволн, пришлось бы дополнительно решить относительно $h_1(t)$ уравнение $\int_{t}^{t+h_1(t)} K^{-1} d\xi = \pi$, которое, чаще всего, оказывается трансцендентным.

Поступило
5 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Sturm, Journ. de math. (Liouville), 1, 106 (1836). [2] М. И. Ельшин, ДАН, 68, № 2 (1949). [3] E. Cotton, Bull. de la soc. math., 28, 4 (1910), [4] М. И. Ельшин, ДАН, 18, № 3 (1938).