Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

И. В. ЧУЛАНОВСКИЙ

О ЦИКЛАХ В ЦЕПЯХ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 X 1949)

В этой работе решается задача, поставленная А. Н. Колмогоровым.

Некоторые обозначения: R_n — n-мерное пространство Евклида, l_i — i-я составляющая вектора L, о. н. д. — общий наибольший делитель. Целым вектором назовем вектор с целочисленными составляющими, целой линейной комбинацией — линейную комбинацию с целыми коэффициентами.

Пусть некоторая система подчиняется закону простой цепи Маркова с конечным числом n состояний $E_1, \ldots, E_n$. При этом от некоторых из этих состояний к некоторым возможен прямой переход. Заметим, что для последующего несущественно требование, чтобы из каждого состояния можно было куда-либо перейти.

Пусть при этом получается всего s простых (без кратных состояний) циклов $C_1, \ldots, C_s$. Под циклом понимается взятая с точностью до циклической перестановки последовательность состояний, от каждого из которых можно прямо перейти к следующему (от последнего к первому). под длиной простого цикла — количество содержащихся в нем состояний.

Отвлекаясь от теоретико-вероятностной стороны дела, рассмотрим следующую задачу чисто теоретико-числового характера.

Построим в R_n векторы $L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}$ таким образом:

$$l_i^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad E_i \in C_j \\ 0, & \text{если} \quad E_i \overline{\in} C_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, s).$$

(В дальнейшем множество систем векторов, которые могут быть получены таким образом из какой-либо простой цепи Маркова с n состояниями, будем обозначать через G_n).

Составим матрицу

$$\left\| \begin{matrix} l_1^{(1)} \ldots l_n^{(1)} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ l_1^{(s)} \ldots l_n^{(s)} \end{matrix} \right\|. \tag{1}$$

В работе А. Н. Колмогорова ([1]) в виде гипотезы (*) сформулирована следующая теорема, доказательство которой составляет содержание настоящей заметки:

Теорема. *Если целый вектор* $L \in R_n$ *вообще представим линейной комбинацией векторов* $L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}$ (*где система* $\{L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}\} \in G_n$), *то он представим целой линейной комбинацией этих векторов.*

Для доказательства воспользуемся следующими леммами.

Лемма 1. *Пусть дана система s целых векторов $L^{(1)}, \dots, L^{(s)}$ в R_n. Тогда для того, чтобы любой целый вектор $L \in R_n$ был представим целой линейной комбинацией этих векторов, необходимо и достаточно, чтобы для любых целых чисел $a_1, \dots, a_n$, хоть одно из которых равно 1, о. н. д. сумм $\sum_{i=1}^{n} a_i l_i^{(j)}$ $(j = 1, \dots, s)$ равнялся 1.*

Достаточность очевидным образом доказывается индукцией по n. Для сведения n-мерного случая к $n-1$-мерному важно, что о. н. д. $l_n^{(j)}$ $(j = 1, \dots, s)$ равен (это ясно) 1. Очевидна также необходимость формально более жесткого условия, где от чисел $a_1, \dots, a_n$ требуется лишь, чтобы о. н. д. a_i $(i = 1, \dots, n)$ равнялся 1.

Лемма 2. *Если о. н. д. длин всех простых циклов равен d, то состояния $E_1, \dots, E_n$ можно так распределить по d классам, что из какого бы то ни было состояния можно будет перейти по прямому переходу, несущему цикл, лишь в состояние следующего по номеру класса (из состояния последнего класса в состояние первого класса) и, следовательно, каждый простой цикл будет содержать состояния всех классов в одинаковом числе.*

Это было доказано А. Н. Колмогоровым ([2, 3]), правда, для существенных состояний. Но, если выбросим все прямые переходы, не несущие циклов, то всякое состояние, несущее цикл, станет существенным; к каким классам отнесем состояния, не несущие циклов,— безразлично. (Как известно, состояние E_i называется существенным, если при любом E_j существование перехода (хотя бы косвенного) из E_i в E_j влечет существование обратного перехода.)

Из леммы 2 вытекают два следствия.

Следствие 1. *Если система $\{L^{(1)}, \dots, L^{(s)}\} \in G_n$ и существуют целые числа $a_1, \dots, a_n$, хоть одно из которых равно 1, такие, что о. н. д. сумм $\sum_{i=1}^{n} a_i l_i^{(j)}$ $(j = 1, \dots, s)$ равен $d > 1$, то ранг матрицы* (1) *меньше n.*

Действительно, пусть условие следствия выполнено и, для определенности, $a_1 = 1$. Подберем целые числа $\bar a_1, \dots, \bar a_n$ так, чтобы было

$$\bar a_i \equiv a_i \pmod d, \quad 1 \leqslant \bar a_i \leqslant d \quad (i = 1, \dots, n).$$

Очевидно, $\bar a_1 = 1$. Кроме того, $d \mid \sum_{i=1}^{n} a_i l_i^{(j)}$ $(j = 1, \dots, s)$. Построим новую систему состояний с переходами, содержащую $\bar a_1 + \dots + \bar a_n$ состояний $\bar E_{1,1}, \dots, E_{1,\bar a_1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,\bar a_n}$, где прямой переход из E_{i_1, k_1} в E_{i_2, k_2} возможен в тех и только тех двух случаях, если:

1) $k_1 = \bar a_{i_1}$, $k_2 = 1$ и в исходной системе возможен прямой переход из E_{i_1} в E_{i_2};

2) $i_1 = i_2$, $k_1 + 1 = k_2$ $(i_1 = 1, \dots, n,\ k_1 = 1, \dots, \bar a_{i_1} - 1)$.

Очевидно, между простыми циклами исходной и новой систем устанавливается взаимно-однозначное соответствие: циклу C_j исходной системы, проходящему через $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$, отвечает цикл $\bar C_j$ новой системы, проходящей через $\bar E_{i_1,1}, \dots, \bar E_{i_1,\bar a_{i_1}}, \dots, \bar E_{i_r,1}, \dots, \bar E_{i_r,\bar a_{i_r}}$. Новая матрица векторных составляющих (2) образуется из исходной, если 1-й столбец повторить $\bar a_i$ раз $(i = 1, \dots, n)$:

$$\left\|\begin{matrix} l_1^{(1)} & \underbrace{l_2^{(1)} \ldots l_2^{(1)}} \ldots \underbrace{l_n^{(1)} \ldots l_n^{(1)}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ l_1^{(s)} & \underbrace{l_2^{(s)} \ldots l_2^{(s)}}_{\bar{a}_2} \ldots \underbrace{l_n^{(s)} \ldots l_n^{(s)}}_{\bar{a}_n} \end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

Здесь имеется n групп одинаковых столбцов. Ранг матрицы (2) равен, конечно, рангу матрицы (1). В новой системе суммы $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i l_i^{(j)}$ выражают длины соответствующих циклов и, если о. н. д. этих длин равен δ, то $d \mid \delta$ и $\delta > 1$. Распределим состояния новой системы (а с ними и столбцы матрицы) по δ классам в соответствии с леммой 2, пусть цикл $\bar{C}_j$ содержит m_j состояний каждого класса. Пусть первый столбец — класса t_1; прибавив к нему все прочие столбцы класса t_1, получим в нем числа $m_1, \ldots, m_s$. Ввиду $\delta > 1$ существует столбец класса $t_2 \neq t_1$, пусть это столбец второй группы (других столбцов класса t_2 во второй группе нет, ибо $\bar{a}_2 \leqslant \delta$). Прибавив к нему, а также к каждому другому столбцу второй группы все прочие столбцы класса t_2, всюду получим те же числа $m_1, \ldots, m_s$. Эти преобразования не меняют ранга матрицы, но после них первый столбец идентичен столбцам второй группы; разных столбцов в матрице оказывается $\leqslant n - 1$ и ее ранг $< n$, чем доказательство следствия 1 завершено.

Заметим, что для случая $a_1 = \ldots = a_n = 1$ это следствие может быть высказано в более сильной форме:

Следствие 2. *Если о. н. д. длин всех простых циклов равен d, то ранг матрицы* (1) *не превосходит* $n + 1 - d$.

Доказательство просто: разбив состояния $E_1, \ldots, E_n$ на d классов, прибавим в матрице (1) к какому-либо столбцу i-го класса все прочие столбцы i-го класса для $i = 1, \ldots, d$, после чего в матрице окажется не более $n + 1 - d$ различных столбцов. В условиях следствия 1 такое сильное утверждение, вообще говоря, неверно.

Из достаточности в лемме 1 и следствия 1 вытекает справедливость теоремы в том случае, если ранг матрицы (1) равен n. Пусть он равен $m < n$ и пусть ненулевой определитель порядка m составлен из 1-го, ..., m-го столбцов. Построим новую систему состояний с переходами, содержащую m состояний $E_1', \ldots, E_m'$, где прямой переход из E_{i_1}' в E_{i_2}' возможен тогда и только тогда, если в исходной системе возможен переход из E_{i_1} в E_{i_2} (если косвенный, то проходящий лишь через состояния с номерами, бо́льшими m). Пусть в новой системе будет s' простых циклов. Составим матрицу

$$\left\|\begin{matrix} l_1^{(1)'} & \ldots & l_n^{(1)'} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ l_1^{(s')'} & \ldots & l_n^{(s')'} \end{matrix}\right\|. \tag{3}$$

Всякому простому циклу C_j в исходной системе отвечает простой цикл $C_{j'}'$ в новой системе, содержащий $E_1', \ldots, E_m'$ по стольку же раз (0 или 1), по скольку раз C_j содержит $E_1, \ldots, E_m$. Поэтому первые

m чисел любой строки матрицы (1) входят в матрицу (3) в качестве строки и ранг матрицы (3) равен m. Поэтому любой целый вектор $L \in R_m$ представим целой линейной комбинацией векторов $L^{(1)'}, \ldots, L^{(s')'}$.

Всякому простому циклу C'_j в новой системе отвечает хоть один цикл (необязательно простой) в исходной системе (обозначим его C''_j), содержащий $E_1, \ldots, E_m$ по стольку же раз, по скольку раз C'_j содержит $E'_1, \ldots, E'_m$. Наконец, построив для каждого цикла C в исходной системе вектор $L \in R_n$ так, чтобы l_i равнялось кратности E_i в C, с очевидностью получим, что всякий вектор L, отвечающий циклу, будет представим целой линейной комбинацией векторов, отвечающих простым циклам.

Ввиду вышеизложенного для каждого вектора $L \in R_n$ можно так построить вектор L' (целую линейную комбинацию векторов $L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}$), что первые m составляющих вектора L совпадут с первыми m составляющими вектора L'. Но если вектор L вообще представим линейной комбинацией векторов $L^{(1)}, \ldots, L^{(s)}$, то остальные составляющие совпадут автоматически. Теорема полностью доказана.

Хотя необходимость в лемме 1 и следствие 2 не нужны для доказательства теоремы, мы устанавливаем их для большей полноты.

Автор пользуется возможностью выразить благодарность акад. А. Н. Колмогорову за ценные указания, а также проф. Ю. В. Линнику, который сообщил автору и предложил для решения эту задачу.

Поступило
6 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 281 (1949). [2] А. Н. Колмогоров, Матем. сб., 1 (43), № 4, 607 (1936). [3] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 1, № 3, 1 (1937).