Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

С. В. СМИРНОВ

К ПРОБЛЕМЕ ОБЩЕЙ АНАМОРФОЗЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 IX 1949)

Пусть дано уравнение $F(x, y, z)=0$ с левой частью, обладающей в некоторой области G частными производными достаточно высокого порядка по всем комбинациям аргументов. Проблема общей анаморфозы заключается в замене данного уравнения вытекающим из него уравнением вида:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & 1 \\ g_1(y) & g_2(y) & 1 \\ h_1(z) & h_2(z) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

левая часть которого называется детерминантом Массо.

В случае, если это возможно, для уравнения $F(x, y, z)=0$ может быть построена по меньшей мере одна (с точностью до проективного преобразования) номограмма из выравненных точек. В противном случае таких номограмм не существует.

Будем предполагать еще, что ни одна из производных первого порядка $F(x, y, z)$ не обращается в нуль в области G. Тогда уравнение $F(x, y, z)=0$ может быть разрешено:

$$z = z(x, y). \tag{1}$$

Нам будут нужны две такие функции от x, y:

$$M = -\frac{\partial z / \partial y}{\partial z / \partial x}, \quad N = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}.$$

В этих предположениях известно [1] следующее необходимое и достаточное условие существования анаморфозы:

Система дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций C, D

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) - C\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right) - D\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0, \qquad (2) \\ D = MC + N \end{gathered}$$

должна быть совместна в G.

В том случае, когда существует решение системы (2), удовлетворяющее какому-нибудь из дифференциальных уравнений

$$2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}=0,$$

или справедливо тождество

$$P=\frac{\partial^2 \ln M}{\partial x\,\partial y}=0,$$

решение проблемы анаморфозы известно [1,2].

Наша задача заключается в исследовании совместности системы (2) в том случае, когда $2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}$, $\frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}$ не обращаются в нуль в G и $P\neq 0$.

Введем обозначения:

$$2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}=3e^u, \qquad \frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}=3e^v. \tag{3}$$

Тогда из уравнений (2) вытекает:

$$C=\frac{\partial u}{\partial x},\quad D=\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4}$$

и, следовательно, u, v должны удовлетворять уравнениям

$$F_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-2e^u+e^v=0,$$

$$F_2=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-2e^v+e^u=0, \tag{5}$$

$$F_3=\frac{\partial v}{\partial y}-M\frac{\partial u}{\partial x}-N=0.$$

Нетрудно показать, что из (4) и (5) следует (2). Таким образом, система (5) эквивалентна системе (2).

Построим продолжение нашей системы:

$$F_4=\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y}=e^u\frac{\partial u}{\partial y}-Me^v\frac{\partial v}{\partial x}+(P+2e^u-2e^v)\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+Re^u+Se^v+Q=0,$$

$$F_5=\frac{\partial^2 F_4}{\partial x\,\partial y}=M^2P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+3M\frac{\partial M}{\partial x}P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+$$
$$+8MP(e^u-e^v)\frac{\partial u}{\partial x}-8MPe^v\frac{\partial v}{\partial x}+T\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+Ue^u+Ve^v+W=0, \tag{6}$$

$$F_6=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{M^2P}F_5\right)=e^v\frac{\partial v}{\partial x}\frac{6}{M}\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{M}{P}-5(P+2e^u-e^v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{P^2}(He^u+Ge^v-L)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\text{полином 2-й степени от } e^u,\ e^v=0.$$

где коэффициенты, обозначенные буквами P, Q, R, S и т. д., — полиномы от частных производных функции M, деленные на некоторую степень M.

Например, $P = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln M$.

При образовании каждого из этих уравнений используются все предшествующие уравнения, а также уравнения, полученные из них дифференцированием один раз по x или один раз по y.

Нетрудно видеть, что система $F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 0$ легко приводится к диагональному виду и, следовательно, эти уравнения могут быть разрешены относительно первых производных функций u, v.

Следует заметить, что если первые коэффициенты $F_6 = 0$ обращаются в тождественный нуль, то к продолженной системе должны быть присоединены дополнительные уравнения, выражающие это обстоятельство.

Разрешая систему, состоящую из $F_3 = 0$ и (6), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1\left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}},\ e^u,\ e^v\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi_2\left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}},\ e^u,\ e^v\right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \varphi_3\left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}},\ e^u,\ e^v\right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varphi_4\left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}},\ e^u,\ e^v\right), \end{aligned} \tag{7}$$

причем правые части этих уравнений зависят от частных производных M до 6-го порядка включительно.

Очевидно, что условия совместности системы, полученной присоединением к системе (2) уравнений (6), можно написать, не разрешая этих уравнений относительно первых производных.

Для этого достаточно присоединить еще уравнения

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_4}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_4}{\partial y} = 0,$$

линейные относительно вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Последние легко, как это можно показать вычислением, выражаются как рациональные функции от первых производных функций u, v и от e^u, e^v и $\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}$ $(k = k_1 + k_2 \leqslant 6)$.

Смешанные производные уже из уравнений (2) находятся аналогичным образом.

Присоединяем еще уравнения

$$\frac{\partial F_5}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_5}{\partial y} = \frac{\partial \ln M^2 P}{\partial y} F_5 + M^2 P F_6 = 0, \quad \frac{\partial F_6}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_6}{\partial y} = 0,$$

левые части которых зависят от частных производных M до 7-го порядка включительно, подставляем в них указанные выражения вторых производных. Мы фактически присоединяем к продолженной системе еще три соотношения, левые части которых представляют полиномы от первых производных функций u, v и от e^u, e^v и частных производных функции M.

Рассматриваем уравнения (6), $F_3 = 0$ и последние три соотношения. Эта система уравнений вследствие известных условий совместности системы (7) должна быть алгебраически совместна относительно первых производных.

Отсюда вытекает теорема:

Теорема. *Необходимые и достаточные условия существования анаморфозы имеют вид* $R\left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right)=0$ *или* $R\left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}}\right)\neq 0$, *где левые части — полиномы с рациональными коэффициентами от функции M и ее частных производных. Эти необходимые и достаточные условия могут быть получены конечным числом дифференцирований и исключений.*

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T.-H. Gronwall, Journ. de Math. pures et appl., 6 sér., 8, 59 (1912).
[2] Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, 1941.