Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

В. В. ВАГНЕР

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 IX 1949)

Как известно [1], нахождение всевозможных типов N-компонентных геометрических дифференциальных объектов в пространстве X_n сводится к нахождению всевозможных непрерывных транзитивных представлений (как собственных, так и несобственных) на точечных множествах арифметического N-пространства дифференциальной группы $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, определяемой как группа преобразований vn переменных $\xi^{(s)\alpha}$ $(s=1, \ldots, v)$

$$\bar{\xi}^{(s)\alpha} = s! \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k!} A^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \sum_{(i_1+\ldots+i_k=s)} \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} \xi^{(i_1)\alpha_1} \ldots \xi^{(i_k)\alpha_k}.$$

Эта группа зависит от $n\left[\binom{n+v}{n}-1\right]$ параметров $A^{\alpha}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = A^{\alpha}_{(\alpha_1\ldots\alpha_k)}$ $(k=1, \ldots, v)$, удовлетворяющих условию $\Delta = \operatorname{Det}|A^{\alpha}_{\alpha_1}| \neq 0$. Символ $\sum\limits_{(i_1+\ldots+i_k=s)}$ обозначает суммирование по всевозможным упорядоченным системам индексов, удовлетворяющих условию $i_1+\ldots+i_k=s$. Уравнения $A^{\alpha}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \delta^{\alpha}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ $(s=1, \ldots, i<v)$ * определяют нормальный делитель $\mathfrak{N}^{(v, n)}_i$ в $\mathfrak{D}^{(v, n)}$. Таким образом, мы получаем $v-1$ нормальных делителей $\mathfrak{N}^{(v, n)}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}^{(v, n)}_{v-1}$, последний из которых будет всегда коммутативным. Рассматривая геометрический дифференциальный объект как геометрический объект в касательном пространстве T_{vn}, являющемся пространством Клейна с фундаментальной группой $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, мы получаем, что он будет класс $u \leqslant v$, если стационарная подгруппа $\mathfrak{H}$ соответствующего представления $\mathfrak{D}^{(v, n)}$ на множестве его значений удовлетворяет условиям $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{N}^{(v, n)}_u$; $\mathfrak{H} \not\supset \mathfrak{N}^{(v, n)}_{u-1}$.

Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — стационарные подгруппы, соответствующие представлению $\mathfrak{D}^{(v, n)}$ на множествах значений двух данных геометрических дифференциальных объектов, ассоциированные с точками, представляющими их значения в одной и той же координатной системе. Тогда необходимое и достаточное условие того, что первый геометрический дифференциальный объект является функцией второго,

* $\delta^{\alpha}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ при $s=1$ совпадают с дельтами Кронекера, а при $s>1$ равны нулю.

выражается соотношением $\mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{H}_2$. Геометрический дифференциальный объект называется простым, если не существует геометрического дифференциального объекта, являющегося функцией данного, класс которого был бы ниже, но отличен от нуля. Отсюда следует, что если $\mathfrak{H}$ — стационарная подгруппа, соответствующая представлению $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, определяемому данным простым геометрическим дифференциальным объектом класса v, то не должно существовать собственной подгруппы $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, содержащей $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}_{v-1}^{(v, n)}$, т. е. должно иметь место соотношение $\mathfrak{D}^{(v, n)} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_{v-1}^{(v, n)}$. Легко убедиться, что в этом случае $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{v-1}^{(v, n)}$ должно быть нормальным делителем в $\mathfrak{D}^{(v, n)}$. Обозначая через $A^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathfrak{d})$ значения параметров, определяющие преобразование $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}^{(v, n)}$, мы получим равенства

$$A^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_v}(\mathfrak{d}\mathfrak{n}\mathfrak{d}^{-1}) = A^{\alpha}_{\beta}(\mathfrak{d}) A^{\beta_1}_{\alpha_1}(\mathfrak{d}^{-1}) \ldots A^{\beta_v}_{\alpha_v}(\mathfrak{d}^{-1}) A^{\beta}_{\beta_1 \ldots \beta_v}(\mathfrak{n}); \quad \mathfrak{n} \in \mathfrak{N}_{v-1}^{(v, n)},$$

откуда нетрудно получить, что $\mathfrak{D}^{(v, n)}$ при $n > 1$ будет иметь два и только два нормальных делителя $\mathfrak{L}^{(v, n)}$ и $\mathfrak{M}^{(v, n)}$, включающихся в $\mathfrak{N}_{v-1}^{(v, n)}$, но отличных от него, где $\mathfrak{L}^{(v, n)}$ определяется уравнениями $A^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \delta^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ $(s = 1, \ldots, v-1)$, $A^{\alpha}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_v} - \frac{v}{n + v - 1} \delta^{\alpha}_{(\alpha_1} A^{\omega}_{\alpha_2 \ldots \alpha_v)\,\omega} = 0$, а $\mathfrak{M}^{(v, n)}$ — уравнениями $A^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \delta^{\alpha}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ $(s = 1, \ldots, v-1)$; $A^{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{v-1}\omega} = 0$. При этом $\mathfrak{N}_{v-1}^{(v, n)} = \mathfrak{L}^{(v, n)} \times \mathfrak{M}^{(v, n)}$.

Обозначим соответствующую $\mathfrak{D}^{(v, n)}$ алгебру Ли через $D^{(v, n)}$. Выбирая в $D^{(v, n)}$ базисные векторы $e_{\alpha}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ $(s = 1, \ldots, v)$, в соответствии с данной параметризацией $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, мы получаем

$$[e_{\alpha}^{\alpha_1 \ldots \alpha_i} e_{\beta}^{\beta_1 \ldots \beta_j}] = \binom{i + j - 1}{i} e_{\beta}^{\alpha_1 \ldots \alpha_i (\beta_1 \ldots \beta_{j-1} \delta_{\alpha}^{\beta_j)}} - \binom{i + j - 1}{j} e_{\alpha}^{\beta_1 \ldots \beta_j (\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \delta_{\beta}^{\alpha_i)}},$$

где $e_{\alpha}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = 0$ при $s > v$.

Обозначая через E_s линейное подпространство в $D^{(v, n)}$, определяемое векторами $e_{\alpha}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, получаем для $n > 1$

$$[E_i E_j] = E_{i+j-1} \quad (\text{где } i + j > 2 \text{ и } E_s = 0 \text{ при } s > v).$$

Для $n = 1$ эти соотношения имеют место только при $i \neq j$, так как, в силу одномерности всех E_i, мы получаем $[E_i E_i] = 0$.

Обозначая $e_0 = \sum_{\omega=1}^{n} e_{\omega}^{\omega}$, мы получаем

$$[e_0 e_i] = (i - 1) e_i, \text{ где } e_i \in E_i.$$

Нормальным делителям $\mathfrak{N}_i^{(v, n)}$ будут соответствовать идеалы в $D^{(v, n)}$ $N_i^{(v, n)} = \sum_{=i+1}^{n} \cdot E_k$, которые для $n > 1$ удовлетворяют соотношениям

$$[N_i^{(v, n)} N_j^{(v, n)}] = N_{i+j}^{(v, n)} \quad (\text{где } N_s^{(v, n)} = 0 \text{ при } s > v - 1).$$

Для $n = 1$ эти соотношения будут верны только при $i \neq j$. При $i = j$ они принимают вид

$$[N_i^{(v, n)} N_i^{(v, n)}] = N_{2i+1}^{(v, n)}.$$

$\mathfrak{H}$ как стационарная группа непрерывного представления $\mathfrak{D}^{(v,n)}$ будет замкнута в $\mathfrak{D}^{(v,n)}$. Поэтому разложению $\mathfrak{D}^{(v,n)}$ в произведение $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{v-1}^{(v,n)}$ будет соответствовать разложение $D^{(v,n)}$ в сумму $H+N_{v-1}^{(v,n)}$, где H — собственная подалгебра, соответствующая подгруппе $\mathfrak{H}$. Обозначим $\tilde{H}=H\cap N_1^{(v,n)}$; тогда $N_1^{(v,n)}=\tilde{H}+N_{v-1}^{(v,n)}$, откуда* $[N_1^{(v,n)}N_1^{(v,n)}]=[\tilde{H}\tilde{H}]\subset H$, что дает для $n>1$ $N_2^{(v,n)}\subset H$, а для $n=1$ $N_3^{(v,1)}\subset H$. Таким образом, при $n>1$, $v>2$ или при $n=1$, $v>3$ $N_{v-1}^{(v,n)}\subset H$ и, следовательно, $H=D^{(v,n)}$, что противоречит предположению, что H собственная подалгебра, и доказывает невозможность искомого разложения $D^{(v,n)}$ в сумму и искомого разложения $\mathfrak{D}^{(v,n)}$ в произведение. Это дает теорему:

Теорема. *При $n>1$ не существует простых геометрических дифференциальных объектов выше второго класса, а при $n=1$ — выше третьего класса.*

Перейдем к рассмотрению простых геометрических дифференциальных объектов второго класса для $n>1$ и второго и третьего класса для $n=1$. Заметим, что $\mathfrak{D}^{(v,n)}$ имеет подгруппу $\mathfrak{A}^{(v,n)}$, изоморфную центрально-аффинной группе, которая определяется уравнениями $A^{\alpha}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=0$ $(s=2,\ldots,v)$. $\mathfrak{D}^{(3,1)}$ имеет, кроме того, еще подгруппу $\mathfrak{B}^{(3)}$, определяемую уравнением $A^1_{111}-\frac{3}{2}\frac{(A^1_{11})^2}{A^1_1}=0$. Мы можем получить разложение $\mathfrak{D}^{(2,n)}$ при $n>1$ в произведение $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_1^{(2,n)}$, выбирая в качестве $\mathfrak{H}$ следующие три подгруппы: $\mathfrak{A}^{(2,n)}$; $\mathfrak{A}^{(2,n)}\mathfrak{M}^{(2,n)}$; $\mathfrak{A}^{(2,n)}\mathfrak{L}^{(2,n)}$. Назовем эти разложения основными. Основным разложением $\mathfrak{D}^{(2,n)}$ соответствуют три различных семейства подобных типов простых геометрических дифференциальных объектов второго класса, в качестве представителей которых мы можем взять: 1) объект симметричной аффинной связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, 2) свернутый объект аффинной связности Γ_{β}, 3) объект проективной связности $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Для доказательства, что ими исчерпываются все типы простых геометрических дифференциальных объектов второго класса, нам нужно доказать, что всевозможные разложения $\mathfrak{D}^{(2,n)}$ в произведения $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_1^{(2,n)}$ получаются из основных с помощью внутренних автоморфизмов $\mathfrak{D}^{(2,n)}$. Начнем с доказательства того, что каждое разложение $D^{(2,n)}$ в сумму $H+N_1^{(2,n)}$ получается с помощью внутреннего автоморфизма из одного из трех основных разложений

$$D^{(2,n)}=E_1+N_1^{(2,n)};\quad D^{(2,n)}=(E_1+M^{(2,n)})+N_1^{(2,n)};$$

$$D^{(2,n)}=(E_1+L^{(2,n)})+N_1^{(2,n)},$$

соответствующих основным разложениям $\mathfrak{D}^{(2,n)}$ в произведение. Замечая, что разложение $D^{(2,n)}$ в сумму $H+N_1^{(2,n)}$ определяет разложение $D^{(2,n)}$ в прямую сумму одного из трех видов: $H\dot{+}N_1^{(2,n)}$; $H\dot{+}L^{(2,n)}$; $H\dot{+}M^{(2,n)}$, мы обозначим через $\text{пр}_1 d$ и $\text{пр}_2 d$ проекции произвольного вектора d из $D^{(2,n)}$, соответствующие этим разложениям $D^{(2,n)}$ в прямую сумму. Из равенств $\text{пр}_1 e_0=e_0-\text{пр}_2 e_0$ и $\text{пр}_1 e_1=e_1-\text{пр}_2 e_1$, где $e_1\in E_1$, мы получаем $[\text{пр}_1 e_0,\ \text{пр}_1 e_1]=-\text{пр}_2 e_1-[\text{пр}_2 e_0,\ e_1]$. Так как левая часть этого равенства есть вектор из H, а правая — вектор

* Заметим, что в статье Е. Б. Дынкина [2], обозначениями которой мы пользуемся, в формуле A' на стр. 76 знак $\subset$ может быть заменен на $=$, что необходимо для проводимых нами вычислений.

из $N_1^{(2, n)}$, $L^{(2, n)}$ или $M^{(2, n)}$, соответственно, то мы получаем, что эти векторы равны нулю, что дает

$$\text{пр}_2 e_1 = -[n_0 e_1], \quad \text{где } n_0 = \text{пр}_2 e_\bullet.$$

Линейное преобразование в $D^{(2, n)}$

$$\bar{d} = d + [n_0 d]$$

является внутренним автоморфизмом, так как, полагая $\nu(d) = [n_0 d]$ и замечая, что $\nu^2 = 0$, мы получаем $\exp \nu(d) = d + [n_0 d]$. С другой стороны, это преобразование преобразует E_1 в подпространство, включающееся в H. Отсюда следует справедливость утверждения.

$\mathfrak{D}^{(v, n)}$ несвязна и состоит из двух компонент, определяемых условиями $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$. Разложению $\mathfrak{D}^{(2, n)}$ в произведение $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_1^{(2, n)}$ соответствует разложение ее компоненты единицы $\mathfrak{D}_0^{(2, n)}$ в произведение $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{N}_1^{(2, n)}$, где $\mathfrak{H}_0$ — компонента единицы для $\mathfrak{H}$. Из предыдущего сначала следует только, что подгруппа $\mathfrak{H}_0$ сопряжена в $\mathfrak{D}_0^{(2, n)}$ одной из подгрупп: $\mathfrak{A}_0^{(2, n)}$; $\mathfrak{A}_0^{(2, n)} \mathfrak{M}^{(2, n)}$; $\mathfrak{A}_0^{(2, n)} \mathfrak{L}^{(2, n)}$; однако из того, что можно доказать, что в $\mathfrak{D}^{(2, n)}$ не существует двух различных подгрупп, которые, будучи несвязны, имели бы одинаковую компоненту единицы, совпадающую с одной из подгрупп $\mathfrak{A}_0^{(2, n)}$; $\mathfrak{A}_0^{(2, n)} \mathfrak{M}^{(2, n)}$; $\mathfrak{A}_0^{(2, n)} \mathfrak{L}^{(2, n)}$, следует что $\mathfrak{H}$ будет сопряжена с одной из подгрупп $\mathfrak{A}^{(2, n)}$; $\mathfrak{A}^{(2, n)} \mathfrak{M}^{(2, n)}$; $\mathfrak{A}^{(2, n)} \mathfrak{L}^{(2, n)}$, и мы получаем теорему:

Теорема. *Каждый простой геометрический дифференциальный объект выше первого класса при $n > 1$ подобен геометрическому дифференциальному объекту одного из трех типов*: 1) *объекту симметричной аффинной связности* $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$; 2) *свернутому объекту аффинной связности* Γ_β; 3) *объекту проективной связности* $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$.

Переходя к случаю $n = 1$, мы получаем из предыдущего, что в каждом разложении $\mathfrak{D}^{(2,1)} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_1^{(2, 1)}$ подгруппа $\mathfrak{H}$ сопряжена $\mathfrak{A}^{(2, 1)}$. Далее, рассматривая разложение $\mathfrak{D}^{(3, 1)}$ в произведение $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_2^{(3, 1)}$, мы можем прежде всего доказать, что соответствующее разложение $D^{(3, 1)}$ в сумму $H + N_2^{(3, 1)}$ получается с помощью внутреннего автоморфизма

$$\bar{d} = d + [n_0 d], \quad \text{где } n_0 = {}^1/_2\, \text{пр}_2 e_0,$$

из основного разложения $D^{(3, 1)} = (E_1 + E_2) + N_2^{(3,1)}$. После этого можно доказать, что $\mathfrak{H}$ сопряжена $\mathfrak{B}^{(3)}$. Таким образом мы получаем теорему:

Теорема. *Каждый простой геометрический дифференциальный объект выше первого класса при $n = 1$ подобен объекту аффинной связности γ или объекту проективной связности $p^{(3)}$.*

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
28 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Приложение к книге Веблен и Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, 1949. [2] Е. Б. Дынкин, Усп. матем. наук, 11, в. 4 (20), 59 (1947). [3] В. В. Вагнер, ДАН, 48, № 4 (1945).

ПОПРАВКА

В статье В. В. Вагнера «О вмещении поля локальных поверхностей в X_n в постоянное поле поверхностей в аффинном пространстве», помещенной в ДАН, т. 66 № 5, 1949, допущены опечатки:

Формула (7) должна иметь вид:

$$\theta^I(\xi^\lambda, \Phi^A_\alpha, \Phi^A_{\alpha\beta}) = 0. \tag{7}$$

Формула (10) должна иметь вид:

$$\overset{h}{\bullet}(X^A) = 0 \quad (h = n + 1, \ldots, N). \tag{10}$$