Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

В. А. ЩЕЛКУНОВ

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ИНТЕГРАЛАХ РИМАНА — СТИЛЬТЬЕСА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VIII 1949)

Пусть область (E) есть сегмент $[a, b]$, а область (ω) — любой полусегмент $[\alpha, \beta) \subset [a, b]$ при $\beta \neq b$ и сегмент $[\alpha, \beta]$, если $\beta = b$. Через ω обозначим длину сегмента $[\alpha, \beta]$. Пусть $K(t, \omega, x, y) = K(t, x, y) f(x, \omega)$, где $K(t, x, y)$ непрерывна на $R(a \leqslant t, x, y \leqslant b)$, а $f(x, \omega)$ — средняя аддитивная функция области (ω), определенная на (E) равенством

$$f(x, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \overline{\in} (\omega); \\ \dfrac{1}{\omega}, & \text{если } x \in (\omega). \end{cases}$$

Если $u(t, x)$ непрерывна на $I(a \leqslant t, x \leqslant b)$, $\xi \in (\omega)$, то

$$\int\limits_{(E)} K(t, \omega, x, y)\, u(t, \xi)\, d\omega = \int\limits_{(E)} K(t, x, y)\, u(t, \xi)\, f(x, \omega)\, d\omega = K(t, x, y)\, u(t, x) \tag{1}$$

и

$$\int\limits_{(E)} d\omega \int\limits_a^b K(t, \omega, x, y)\, u(t, \xi)\, dt = \int\limits_a^b dt \int\limits_{(E)} K(t, \omega, x, y)\, u(t, \xi)\, d\omega. \tag{2}$$

Обозначим общую величину этих двух интегралов через

$$\int\limits_a^b \int\limits_{(E)} K(t, \omega, x, y)\, u(t, \xi)\, dt\, d\omega.$$

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda \int\limits_a^b \int\limits_{(E)} K(t, \omega, x, y)\, u(t, \xi)\, dt\, d\omega, \tag{3}$$

которое может быть записано в виде

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda \int\limits_a^b K(t, x, y)\, u(t, x)\, dt. \tag{4}$$

Уравнение (4) встречается в теории вероятностей и было впервые исследовано В. И. Романовским ([1]). В. И. Романовский применил идею Фредгольма замены уравнения (4) системой алгебраических уравнений. Мне кажется, что более простой способ исследования уравнения (4) — это исследование уравнения (3), которое по виду напоминает обычное интегральное уравнение. Уравнение, ядро которого есть средняя аддитивная функция области, рассмотрено подробно Гюнтером ([2]). Теория Фредгольма для уравнения (3) также имеет место, и надо лишь во всех формулах классической теории заменить интегралы Римана интегралами Римана — Стильтьеса.

Так, например, определитель и миноры Фредгольма для уравнения (3) будут определяться равенствами:

$$D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}A_n,$$

где

$$A_n=\int_a^b\int_{(E)}K\begin{pmatrix}t_1, & \omega_1; & \ldots; & t_n, & \omega_n\\ t_1, & \xi_1; & \ldots; & t_n, & \xi_n\end{pmatrix}dt_1\ldots dt_n\,d\omega_1\ldots d\omega_n, \tag{5}$$

и

$$D_m\begin{pmatrix}s_1, \tau_1; \ldots; s_m, \tau_m\\ x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m\end{pmatrix}\lambda\Bigg)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}B_n\begin{pmatrix}s_1, \tau_1; \ldots; s_m, \tau_m\\ x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$B_m\begin{pmatrix}s_1, \tau_1; \ldots; s_m, \tau_m\\ x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m\end{pmatrix}=$$

$$=\int_a^b\int_{(E)}K\begin{pmatrix}s_1, \tau_1; \ldots; s_m, \tau_m; t_1, \omega_1; \ldots; t_n, \omega_n\\ x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m; t_1, \xi_1; \ldots; t_n, \xi_n\end{pmatrix}dt_1\ldots dt_n d\omega_1\ldots d\omega_n,$$

$$(\tau_i)\subseteq(E), \qquad a\leqslant s_i, \qquad x_i, y_i\leqslant b.$$

Первая теорема Фредгольма. *Если λ не является характеристическим числом ядра $K(t, \omega, x, y)$, то уравнение (3) (а следовательно и (4)) имеет единственное непрерывное решение, определяемое формулой:*

$$u(x, y)=\varphi(x, y)+\lambda\int_a^b\int_{(E)}\frac{D_1\begin{pmatrix}t, & \omega\\ x, & y\end{pmatrix}\lambda\Big)}{D(\lambda)}\varphi(t, \xi)\,dt\,d\omega. \tag{7}$$

Вторая теорема Фредгольма. *Если ранг характеристического числа λ_0 равен m, то уравнение*

$$u(x, y)=\lambda_0\int_a^b\int_{(E)}K(t, \omega, x, y)\,u(t, \xi)\,dt\,d\omega \tag{8}$$

и союзное уравнение

$$v(x, \tau)=\lambda_0\int_a^b\int_{(E)}K(x, \tau, t, \xi)\,v(t, \omega)\,dt\,d\omega \tag{9}$$

имеют m линейно независимых решений, определяемых, соответственно, по формулам

$$u_i(x, y) = \frac{D_m\begin{pmatrix} s_1^0, \tau_1^0; \ldots; s_i^0, \tau_i^0; \ldots; s_m^0, \tau_m^0 \\ x_1^0, y_1^0; \ldots; x, y; \ldots; x_m^0, y_m \end{pmatrix}\lambda_0}{D_m\begin{pmatrix} s_1^0, \tau_1^0; \ldots; s_m^0, \tau_m^0 \\ x_1^0, y_1^0; \ldots; x_m^0, y_m^0 \end{pmatrix}\lambda_0} \tag{10}$$

и

$$v_i(x, \tau) = \frac{D_m\begin{pmatrix} s_1^0, \tau_1^0; \ldots; x, \tau; \ldots; s_m^0, \tau_m^0 \\ x_1^0, y_1^0; \ldots; x_i^0, y_i^0; \ldots; x_m^0, y_m^0 \end{pmatrix}\lambda_0}{D_m\begin{pmatrix} s_1^0, \tau_1^0; \ldots; s_m^0, \tau_m^0 \\ x_1^0, y_1^0; \ldots; x_m^0, y_m^0 \end{pmatrix}\lambda_0}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{11}$$

где x_k^0 (τ_k^0) *выбраны так, что*

$$D_m\begin{pmatrix} s_1^0, \tau_1^0; \ldots; s_m, \tau_m^0 \\ x_1^0, y_1^0; \ldots; x_m^0, y_m^0 \end{pmatrix}\lambda_0 \neq 0.$$

Третья теорема Фредгольма. *Если ранг характеристического числа λ_0 равен m, то уравнение* (3) *при $\lambda = \lambda_0$ имеет решения, если — и только если — выполняются условия:*

$$\int_a^b \int_{(E)} \varphi(x, \xi)\, v_i(x, \omega)\, dx\, d\omega = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{12}$$

В этом случае решения (3) *определяются формулой*:

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda_0 \int_a^b \int_{(E)} \frac{D_{m+1}\begin{pmatrix} t, \omega; s_1^0, \tau_1^0; \ldots; s_m^0, \tau_m^0 \\ x, y; x_1^0, y_1^0; \ldots; x_m^0, y_m^0 \end{pmatrix}\lambda_0}{D_m\begin{pmatrix} s_1^0, \tau_1^0; \ldots; s_m^0, \tau_m^0 \\ x_1^0, y_1^0; \ldots; x_m^0, y_m^0 \end{pmatrix}\lambda_0} \varphi(t, \xi)\, dt\, d\omega + \sum_{i=1}^m c_i u_i(x, y), \tag{13}$$

где c_i — произвольные постоянные.

В заключение сделаем следующие замечания:

1. Можно показать, что из условия (12) вытекают те условия существования решения неоднородного уравнения (4), которые указаны В. И. Романовским.

2. При наличии формулы (1) вычисление решений по формулам (7), (10), и (13) нисколько не труднее (а пишутся они проще), чем вычисление по формулам В. И. Романовского, которые могут быть легко выведены из наших.

Среднеазиатский
государственный университет

Поступило
11 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Романовский, Acta Math., 59, 99 (1932). [2] Н. Гюнтер, Тр. физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1 (1932).