Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

О МНОГОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЯХ МАРКОВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 IX 1949)

1. Пусть $S^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность некоторых систем, которые, эволюционируя, в определенные, дискретно расположенные моменты времени t_i, $i=1, 2, \ldots,$ принимают в зависимости от случая возможные состояния $S_j^{(n)}(t_i)=S_{ji}^{(n)}$, $j=1, 2, \ldots, g_i^{(n)}$. Эволюция системы $S^{(n)}$ рассматривается только до момента времени t_{k_n} (включительно), $n=1, 2, \ldots$ В каждый из моментов времени t_i с каждой системой $S^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots, i=1, 2, \ldots, k_n$, связывается случайный h-мерный вектор $X_i^{(n)}=X_i^{(n)}(x_{i1}^{(n)}, \ldots, x_{ih}^{(n)})$ евклидова пространства R_h, имеющий $g_i^{(n)}$ возможных значений $\Xi_{ij}^{(n)}=\Xi_{ji}^{(n)}(\xi_{ji1}^{(n)}, \ldots, \xi_{jih}^{(n)})$, $j=1, 2, \ldots, g_i^{(n)}$, причем состоянию $S_{ji}^{(n)}$ системы $S^{(n)}$ относится значение $\Xi_{ji}^{(n)}$ вектора $X_i^{(n)}$.

Процесс эволюции систем $S^{(n)}$ предполагается марковским: вероятность, что в момент времени t_i система $S^{(n)}$ окажется в состоянии $S_{ji}^{(n)}$, если в предшествующий момент времени t_{i-1} она находилась в состоянии $S_{l, i-1}^{(n)}$, обозначается через $P_{l, j}^{(n, i)}$.

Ю. В. Линник, обобщая один тонкий результат С. Н. Бернштейна ([1],[2]), доказал следующую замечательную теорему ([3],[4]).

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) $h=1$, $k_n=n$;

2) $|\xi_{ji1}^{(n)}|<c_1$;

3) $\dfrac{1}{g_i^{(n)}}\sum\limits_{j=1}^{g_i^{(n)}}(\xi_{ji1}^{(n)}-\alpha_{i1}^{(n)})^2>c_2$, *где* $\alpha_{i1}^{(n)}=\dfrac{1}{g_i^{(n)}}\sum\limits_{j=1}^{g_i^{(n)}}\xi_{ji1}^{(n)}$;

4) $g_i^{(n)}<c_3$;

5) $P_{l, j}^{(n, i)}\geqslant\dfrac{1}{n^\alpha}$,

где постоянная $\alpha<1/3$, *каковы бы ни были* n, i, j *и* l.

Тогда при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{(n)}-A_n}{\sqrt{B_n}}<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt,$$

где $A_n=M\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{(n)}\right)$, $B_n=M\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{(n)}-A_n\right)^2$.

При $\alpha \geqslant 1/3$ это, вообще говоря, уже неверно.

$c_1, c_2, \ldots$ здесь и в дальнейшем — положительные постоянные. $M(z)$ — математическое ожидание z. $P\{\ldots\}$ — вероятность события, указанного в скобках.

2. Возвращаемся к случаю произвольного h.

Положим

$$\Delta_i^{(n)}(U) = \frac{1}{g_i^{(n)}} \sum_{j=1}^{g_i^{(n)}} \left[(U, \Xi_{ji}^{(n)}) - \frac{1}{g_i^{(n)}} \sum_{j=1}^{g_i^{(n)}} (U, \Xi_{ji}^{(n)}) \right]^2,$$

где

$$(U, \Xi_{ji}^{(n)}) = \sum_{l=1}^{h} u_l \xi_{jil}^{(n)}$$

является скалярным произведением некоторого вспомогательного вектора $U = U(u_1, \ldots, u_h)$ на вектор $\Xi_{ji}^{(n)}(\xi_{ji1}^{(n)}, \ldots, \xi_{jih}^{(n)})$.

Положим

$$\delta(X_i^{(n)}) = \min_{\left(\sum_{k=1}^{h} u_k^2 = 1\right)} \Delta_i^{(n)}(U),$$

где минимум берется относительно всех U с условием $\sum_{k=1}^{h} u_k^2 = 1$.

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) $|\xi_{jil}^{(n)}| < c_4$;

2) $\delta(X_i^{(n)}) > c_5$;

3) $g_i^{(n)} < c_6$;

4) $P_{i,j}^{(n,i)} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$,

где постоянная $\alpha < 1/3$, каковы бы ни были n, i, j и l.

Тогда при $k_n = n \to \infty$

$$P\left\{ X\left(\frac{\sum_1^{(n)}}{\sqrt{B_1^{(n)}}}, \frac{\sum_2^{(n)}}{\sqrt{B_2^{(n)}}}, \ldots, \frac{\sum_h^{(n)}}{\sqrt{B_h^{(n)}}} \right) \in I \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^h D^{(n)}}} \int \ldots \int_{(I)} \exp\left(\frac{1}{2D^{(n)}} \sum_{l,m} D_{l,m}^{(n)} t_l t_m \right) dt_1 \ldots dt_h + o(1),$$

где I — произвольный интервал (см. [5]) пространства R_h,

$$\sum\nolimits_l^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_{il}^{(n)}, \quad B_l^{(n)} = M\left(\sum\nolimits_l^{(n)}\right)^2,$$

$$r_{l,m}^{(n)} = \frac{M\left(\sum_l^{(n)} \cdot \sum_m^{(n)}\right)}{\sqrt{B_l^{(n)} \cdot B_m^{(n)}}},$$

$D^{(n)}$ — определитель $|r_{l,m}^{(n)}|$, $D_{l,m}^{(n)}$ — минор определителя $D^{(n)}$, соответствующий элементу $r_{l,m}^{(n)}$ (считаем $M\left(\sum_l^{(n)}\right) = 0$).

3. Доказательство этой теоремы имеет своим основанием теорему п. 2 моей предшествующей заметки [5] и формулированную выше теорему Ю. В. Линника и состоит в следующем.

Вводим при $\sum_{k=1}^{h} u_k^2 = 1$ вспомогательные скалярные случайные величины

$$Z_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{h} u_k \frac{x_{ik}^{(n)}}{\sqrt{B_k^{(n)}}}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

и относим состоянию $S_{ji}^{(n)}$ системы $S^{(n)}$ значение $\zeta_{ji}^{(n)} = \sum_{k=1}^{h} u_k \frac{\xi_{ijk}^{(n)}}{\sqrt{B_k^{(n)}}}$ этой величины $Z_i^{(n)}$. Тогда ясно, что величины $Z_i^{(n)}$ удовлетворяют всем условиям теоремы Ю. В. Линника: выполнение условий 1), 2), 4) и 5) очевидно, условие 3) следует из условия 2) доказываемой теоремы. Поэтому

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)} < x\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2\beta_n} dt \to 0$$

равномерно для всех U и x, где

$$\beta_n = M\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}\right)^2 = \sum_{l,\, m=1}^{h} u_l u_m r_{l,\, m}^{(n)}.$$

Но

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2\beta_n} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^h D^{(n)}}} \underset{\left(\sum\limits_{k=1}^{h} u_k \frac{t_k}{\sqrt{B_k^{(n)}}} < x\right)}{\int \cdots \int} \exp\left(-\frac{1}{2D^{(n)}} \sum D_{l,\, m}^{(n)} t_l t_m\right) dt_1 \ldots dt_h. \quad (*).$$

Теперь можно воспользоваться теоремой п. 2 из ([5]), так как условия а) и б) этой теоремы без труда проверяются для распределения, определяемого функцией (*). Тем самым наша теорема доказана.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
9 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., (6), 20, 1459 (1926). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, (А), 55 (1928). [3] Ю. В. Линник, ДАН, 60, № 1 (1948). [4] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 65 (1949). [5] Н. А. Сапогов, ДАН, 69, № 1 (1949).