Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 IX 1949)

1. Пусть $W^{(r)}$ есть класс функций $f(x)$, определенных на отрезке $[-1, +1]$ и имеющих на нем производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant 1, \tag{1}$$

и $W_*^{(r)}$ — класс функций $f(x)$, имеющих период 2π и производную $f^{(r)}(x)$, также удовлетворяющую (1) на всей оси. Пусть, далее, $E_n(f)$ и $E_n^*(f)$ обозначают наилучшие приближения функции f на отрезке $[-1, +1]$ при помощи многочлена степени n и, соответственно, при помощи тригонометрического полинома порядка n.

Как известно, справедливо равенство

$$\frac{A_r}{n^r} = \sup_{f \in W_*^{(r)}} E_{n-1}^*(f) \underset{(n\to\infty)}{\approx} \sup_{f \in W^{(r)}} E_{n-1}(f), \quad A_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{2}$$

Авторы первого из них [1,2] получили также метод суммирования ряда Фурье вида

$$U_{n-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

замечательный тем, что он дает для всего класса $W_*^{(r)}$ то же приближение, что и $E_{n-1}^*(f)$, т. е.

$$\sup_{f \in W_*^{(r)}} E_{n-1}^*(f) = \sup_{f \in W_*^{(r)}} |f(x) - U_{n-1}(f, x)|.$$

Этот метод естественно называют наилучшим линейным методом приближения функций класса $W_*^{(r)}$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

В непериодическом случае для $r=1$ подобный асимптотически наилучший линейный метод приближения многочленами для класса $W^{(1)}$ был предложен в моей заметке [3] (см. также [4], где этот вопрос получил решение в метрике L при любом r).

2. Здесь мы хотим показать один из возможных асимптотически наилучших линейных методов приближения для класса $W^{(r)}$ при лю-

бом $r = 1, 2, \ldots$ При этом в наших рассуждениях мы воспользуемся второй частью равенства (2), доказанной для любого r С. Н. Бернштейном ([5]) (и несколько ранее ([3]) для $r = 1$ мною).

Будем исходить из того, что функцию $f \in W^{(r)}$ можно представить в виде (см. ([6])):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + g(x), \tag{3}$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} \mu_{r-1}(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi(t) = f^{(r)}(t) = g^{(r)}(t), \tag{4}$$

$$\mu_{r-1}(u) = {}^1/_2(u + |u|)\,|u|^{r-2}.$$

Первый член правой части (3) линейно зависит от f, и вопрос сводится к наилучшей линейной апроксимации класса функций $g(x)$, соответствующих $\varphi(t)$ с $|\varphi(t)| \leqslant 1$. Искомый линейно зависящий от φ многочлен степени $n-1$ будем искать в виде

$$P_{n-1}(f, x) = P_{n-1}(g, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos k \arccos x \int_{-1}^{+1} \beta_k(\arccos t)\varphi(t)\,dt, \tag{5}$$

где функции $\beta_k(t)$ определим далее. Очевидно,

$$\sup_{|\varphi|\leqslant 1} |g(x) - P_{n-1}(g, x)| =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \mu_{r-1}(x-t) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\arccos t) \cos k \arccos x \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \mu_{r-1}(\cos\varphi - \cos\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\theta) \cos k\varphi \right| d\theta \quad (x = \cos\varphi,\ t = \cos\theta). \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(ku - \frac{(r+1)\pi}{2}\right)}{k^{r+1}} \quad (r = 0, 1, \ldots).$$

Все ее производные до порядка $r-1$ включительно непрерывны на вещественной оси, производная порядка r

$$\frac{d^r}{du^r}\Psi_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ku}{k}$$

терпит на интервале $(-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < \pi$, единственный скачок в $u = 0$, равный π. Производные же порядка выше r хотя и не существуют в точке $u = 0$, но их (равные нулю) пределы в точке $u = 0$ справа и слева равны между собой. Благодаря этим свойствам весьма удобно пользоваться функциями $\Psi_r(u)$ для выделения особенностей у периодических функций. Например, если функция $f(x)$ имеет всюду, за исключением точек вида $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, непрерывные производные до s-го порядка включительно, имеющие в точке $u = 0$ пределы справа и слева, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{s} \delta_k \Psi_k(u) + h(u), \qquad \delta_k = f^{(k)}(0+0) - f^{(k)}(0-0)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, s),$$

где $h(u)$ имеет всюду непрерывную производную порядка s.

Нетрудно поэтому получить, приняв во внимание, что функция $\mu_{r-1}(\cos\varphi - \cos\theta)$ имеет особенность в точках $\varphi = \pm\theta$, равенства

$$\frac{\Psi_{r-1}(\cos\varphi - \cos\theta)}{\Gamma(r)} = H(\varphi, \theta) + R_1(\varphi, \theta) + R_2(\varphi, \theta),$$

$$H(\varphi, \theta) = (-1)^r \frac{\sin^{r-1}\theta}{\pi}[\Psi_{r-1}(\varphi - \theta) + \Psi_{r-1}(-\varphi - \theta)],$$

$$R_1(\varphi, \theta) = \frac{\delta_r(\theta)}{\pi}[\Psi_r(\varphi - \theta) + \Psi_r(-\varphi - \theta)],$$

где $\delta_r(\theta)$ — ограниченная функция, точное значение которой нам не потребуется, а $R_2(\varphi, \theta)$ относительно φ четная периода 2π функция, имеющая производную (разрывную) порядка $r+1$ ограниченной вариации на периоде с вариацией, не превышающей константу, не зависящую от θ.

Пусть $T_{n-1}^{(s)}(u)$ есть тригонометрический полином порядка $n-1$, наилучший в среднем для $\Psi_s(u)$. Для него справедливо ([1]):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(u) - T_{n-1}^{(s)}(u)|\, du = \frac{A_{s+1}}{n^{s+1}}.$$

Положим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\theta)\cos k\varphi = \sigma_{n-1}(\varphi, \theta) + s_{n-1}^{(1)}(\varphi, \theta) + s_{n-1}^{(2)}(\varphi, \theta), \tag{7}$$

где $s_{n-1}^{(1)}, s_{n-1}^{(2)}$ — частные суммы Фурье порядка $n-1$ функций R_1 и R_2 и

$$\sigma_{n-1}(\varphi, \theta) = \frac{(-1)^r \sin^{r-1}\theta}{\pi}[T_{n-1}^{(r-1)}(\varphi - \theta) + T_{n-1}^{(r-1)}(-\varphi - \theta)].$$

В таком случае

$$\int_0^{\pi} |H(\varphi, \theta) - \sigma_{n-1}(\varphi, \theta)|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |(\Psi_{r-1} - T_{n-1}^{(r-1)})(\varphi - \theta) + (\Psi_{r-1} - T_{n-1}^{(r-1)})(-\varphi - \theta)|\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(\Psi_{r-1} - T_{n-1}^{(r-1)})(\varphi - \theta) + (\Psi_{r-1} - T_{n-1}^{(r-1)})(-\varphi - \theta)|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} 2\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_{r-1}(u) - T_{n-1}^{(r-1)}(u)|\, du = \frac{A_r}{n^r}.$$

Аналогично, полагая $|\delta_r(\theta)| \leqslant M$ и обозначая через $t_{n-1}^{(r)}(u)$ сумму Фурье порядка r функции Ψ_r, будем иметь (см. ([7]) или ([8]))

$$\int_0^{\pi} |R_1(\varphi, \theta) - S_{n-1}^{(1)}(\varphi, \theta)|\, d\theta \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_r(u) - T_{n-1}^{(r)}(u)|\, du =$$

$$= \frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\cos\left(ku - \frac{(r+1)\pi}{2}\right)}{k^{r+1}}\right| du = O\left(\frac{\lg n}{n^{r+1}}\right).$$

Наконец, в силу свойства $R_2(\varphi, \theta)$ (см. [9]),

$$\int_0^\pi |R_2(\varphi, \theta) - S_{n-1}^{(2)}(\varphi, \theta)|\, d\theta \leqslant \int_0^\pi O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) d\theta = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Этим доказано, что сумма (7) определяет линейный метод вида (5) такой, что для всех $g(x)$, представимых в виде интеграла (4) с $|\varphi| \leqslant 1$,

$$|g(x) - P_{n-1}(g, x)| \leqslant \frac{A_r}{n^r} + O\left(\frac{\lg n}{n^{r+1}}\right).$$

Полученный линейный метод, на основании асимптотического равенства С. Н. Бернштейна (второе равенство (2)), является асимптотически наилучшим.

Не представляет труда написать эффективные выражения для $\beta_k(\theta)$ через коэффициенты ряда Фурье (по φ) функции $\mu_{r-1}(\cos\varphi - \cos\theta)$ и известные выражения [1] для коэффициентов $T_{n-1}^{(r-1)}(\varphi)$.

3. Приведем еще простой линейный метод, сохраняющий порядок наилучшего приближения функций $f \in W^{(r)}$. Ограничиваясь случаем четного r, положим

$$U_n(f, x) = Q_n(f, x) + \frac{1}{2\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} H_n(x-t)\varphi(t)\, dt, \quad \varphi(t) = f^{(r)}(t),$$

$$Q_n(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k + \frac{1}{2\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} (x+t)^{r-1}\varphi(t)\, dt,$$

где $H_n(u)$ есть многочлен степени n, наилучшим образом в среднем приближающий на отрезке $(-2, 2)$ функцию $|x|^{r-1}$. Он может быть записан эффективно (см. [10], § 2). Вследствие (2) и (3) для $f \in W^{(r)}$

$$|f(x) - U_n(f, x)| = \frac{1}{2\Gamma(r)} \left| \int_{-1}^{+1} [(x-t)^{r-1} - H_n(x-t)]\varphi(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} \left| |x-t|^{r-1} - H_n(x-t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\Gamma(r)} \int_{-2}^{2} \left| |u|^{r-1} - H_n(u) \right| du \approx \frac{2^r A_r}{n^r} \quad (n \to \infty).$$

Для нечетного r надо считать, что $H_n(u)$ есть наилучший в среднем на $(-2, 2)$ многочлен для функции $x|x|^{r-2}$.

Поступило
6 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, ДАН, **15**, 107 (1937). [2] J. Favard, Bull. d. Sci. math. (1937). [3] С. М. Никольский, ДАН, **42**, 113 (1944); Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, 393 (1946). [4] С. М. Никольский, ДАН, **55**, 195 (1947). [5] С. Н. Бернштейн, ДАН, **53**, 587 (1946); **57**, 3 (1947). [6] С. М. Никольский, ДАН, **55**, 99 (1947). [7] А. Колмогоров, Ann. of Math., **36**, 521 (1935). [8] В. Т. Пинкевич, Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, 521 (1940). [9] С. М. Никольский, ДАН, **65**, № 1 (1949). [10] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 139 (1947).