Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

БЕСКОНЕЧНЫЕ J-МАТРИЦЫ И МАТРИЧНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 IX 1949)

В статье [1], посвященной теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (p, p), в качестве одной из иллюстраций на применение положений этой теории нами была развита матричная степенная проблема моментов.

Настоящая статья содержит ряд существенных дополнений к исследованиям по этой проблеме. Эти дополнения возникли при попытке построения теории бесконечных регулярных J_p-матриц $(p > 1)$, которая была бы в своих основах столь же законченной, как и теория J_1-матриц. При этом обнаружилось, что подобно тому, как теория бесконечных J_1-матриц подчиняется классической проблеме моментов, теория J_p-матриц при $p > 1$ подчиняется матричной проблеме моментов. При выяснении этой аналогии возникла естественная матричная символика, которая значительно облегчила получение дальнейших аналогий и фактов в теории J_p-матриц и матричной проблеме моментов.

Бесконечную эрмитову матрицу $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_0^\infty$ мы называем **регулярной J_p-матрицей**, если она представима в виде $\mathbf{A} = \| A_{ik} \|_0^\infty$, где A_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$ — квадратные матрицы p-го порядка, причем $A_{ik} = 0$ при $| i - k | > 1$, а матрицы $A_{i\,i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ неособенные. В частности, эрмитова матрица $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_0^\infty$ будет регулярной J_p-матрицей, если $a_{ik} = 0$ при $| i - k | > 1$ и $a_{i\,i+p} \neq 0$ при $i = 0, 1, 2, \ldots$

Построенная нами теория регулярных J_p-матриц, как нам кажется, представляет интерес еще тем, что она может служить алгебраической моделью для одномерной дифференциальной краевой задачи с одним сингулярным концом в пространстве функций или вектор-функций.

Отметим, наконец, что исследованием бесконечных регулярных J_p-матриц при $p > 1$ занимался Г. Нагель [2]. Однако наиболее глубокие факты теории этого класса матриц им не были обнаружены.

1. Пусть $\mathbf{A} = \| A_{ik} \|_0^\infty$ — регулярная J_p-матрица $(p > 1)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_p$ множество всех квадратных матриц p-го порядка с комплексными элементами, а через $\mathfrak{P}$ — совокупность всех полиномов $P(\lambda)$ вида

$$P(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + \ldots + C_n\lambda^n,$$

где $C_i \in \mathfrak{M}_p$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, а n принимает любое из значений 0, 1, 2, ...

Сопоставим матрице $\mathbf{A}$ последовательность полиномов $D_k(\lambda) \in \mathfrak{P}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, определяемых рекуррентным соотношением:

$$A_{k\,k-1} D_{k-1}(\lambda) + (A_{kk} - \lambda I) D_k(\lambda) + A_{k\,k+1} D_{k+1}(\lambda) = 0 \qquad (1)$$
$$(k = 0, 1, \ldots; \ D_{-1} \equiv 0),$$

причем полином $D_0(\lambda)$ определим, как постоянную неособенную матрицу, впрочем, произвольную.

Так как, по условию, все матрицы $A_{i\,i+1}$ неособенные, то по заданию матрицы D_0 все матричные полиномы $D_k(\lambda)$ $(k=1, 2, \ldots)$ определятся однозначно, причем полином $D_k(\lambda)$ будет точно степени k с невырождающимся коэффициентом при λ^k $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Легко видеть, что при любом комплексном z существует матричный предел:

$$H(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} D_k^*(\bar{z})\,D_k(z)\Big)^{-1}.$$

Через $P^*(\lambda)$ здесь и в дальнейшем обозначается полином, получаемый из $P(\lambda) \in \mathfrak{P}$ путем замены всех его матричных коэффициентов на эрмитово сопряженные, таким образом:

$$P^*(\bar{z}) = [P(z)]^*.$$

Имеют место следующие предложения (ср. [2]).

Теорема 1. *Ранг $r(z)$ эрмитовой матрицы $H(z)$ один и тот же для всех z, принадлежащих одной и той же полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *или* $\operatorname{Im} z < 0$.

Обозначим через ν_+ и ν_- значения $r(z)$, соответственно, при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. J_p-матрице $\mathbf{A}$, как некоторой Q-матрице, соответствует эрмитов оператор (который мы будем обозначать той же буквой $\mathbf{A}$) в гильбертовом пространстве $l^{(2)}$ последовательностей $x = \left\{\xi_k\right\}_0^\infty$ комплексных чисел ξ_k с абсолютно сходящейся суммой квадратов.

Теорема 1 устанавливается одновременно со следующей:

Теорема 2. *Числа ν_+ и ν_- являются, соответственно, верхним и нижним дефектным числом эрмитова оператора* $\mathbf{A}$.

В случае вещественной матрицы $\mathbf{A}$, очевидно, $\nu_+ = \nu_-$.

2. Всякий полином $P(\lambda) \in \mathfrak{P}$ степени n может быть однозначно представлен в виде:

$$P(\lambda) = \sum_{0}^{n} U_k D_k(\lambda), \tag{2}$$

где $U_k \in \mathfrak{M}_p$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Для любых P, $Q \in \mathfrak{P}$, где $P(\lambda)$ имеет вид (2), а

$$Q(\lambda) = \sum_{0}^{m} V_k D_k(\lambda),$$

положим

$$\left\{P, Q\right\} = \sum_{0}^{s} U_k V_k^* \quad (s = \min(n, m)).$$

В частности,

$$\left\{D_i, D_k\right\} = \delta_{ik} I \quad [(i, k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

«Форма» $\{P, Q\}$ вполне определяется условиями (3) и следующими свойствами:

$$\{P_1 + P_2, Q\} = \{P_1, Q\} + \{P_2, Q\};\quad \{P, Q_1 + Q_2\} = \{P, Q_1\} + \{P, Q_2\};$$

$$\{CP, Q\} = C\{P, Q\};\quad \{P, CQ\} = \{P, Q\}\,C^*, \tag{4}$$

где C — любая матрица из $\mathfrak{M}_p$.

Легко убедиться также в том, что в силу соотношений (3) форма $\{P, Q\}$ обладает еще следующим свойством:

$$\{\lambda P, Q\} = \{P, \lambda Q\} \quad (P, Q \in \mathfrak{P}).$$

Образуем теперь последовательность матриц

$$S_n = \{\lambda^n I, I\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При любых $X_j \in \mathfrak{M}_p$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ будем иметь

$$\sum_{j,\,k=0}^{n} X_j S_{j+k} X_k^* = \left\{ \sum_{0}^{n} X_j \lambda^j, \quad \sum_{0}^{n} X_j \lambda^j \right\}.$$

С другой стороны, при любом $P \in \mathfrak{P}$ выражение $\{P, P\}$ есть эрмитова матрица (отличная от нуля, если $P(\lambda) \neq 0$) с неотрицательной формой. Поэтому, выбирая в качестве X_j $(j = 0, 1, 2, \dots)$ матрицы, у которых все горизонтали, кроме первой, состоят из одних нулей, мы убедимся, что для любых p-мерных векторов $x_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jp})$, не равных одновременно нулю, форма

$$\sum_{j,\,k=0}^{n} x_j S_{j+k} x_k^* > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Легко показать, что и обратно, если некоторая последовательность матриц $\{S_n\}_0^\infty \subset \mathfrak{M}_p$ удовлетворяет условиям (5), то она порождается некоторой регулярной J_p-матрицей.

С другой стороны, как уже было показано ранее ([1, 3]), условия (5) суть необходимые и достаточные условия разрешимости матричной проблемы моментов

$$S_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dT(\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{!}$$

где искомая эрмитова матрица-функция $T(\lambda)$ подчиняется тому условию, что при любом $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \neq 0$ форма $xT(\lambda)x^*$ есть неубывающая функция $\lambda \in (-\infty, \infty)$ с бесконечным числом «точек роста».

Таким образом, всякой регулярной J_p-матрице отвечает некоторая матричная степенная проблема моментов. Наши предыдущие исследования ([1]) по этой проблеме (!) позволяют, в частности, утверждать следующее:

Теорема 3. *Проблема моментов (!) имеет единственное нормированное решение $T(\lambda)$ в том и только в том случае, если одно из чисел ν_+ или ν_- равно нулю.*

Поясним, что решение $T(\lambda)$ проблемы называется нормированным, если

$$\lim_{\lambda \to -\infty} T(\lambda) = 0, \quad T(\lambda - 0) = T(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Под нормой $\| C \|$ матрицы $C \in \mathfrak{M}_p$ условимся понимать наименьшее число $\mu \geqslant 0$, обладающее тем свойством, что $C^* C \leqslant \mu^2 I$ (неравенство для эрмитовых матриц следует понимать как неравенство для соответствующих форм).

Теорема 4. *Если $\nu_+ = \nu_- = p$ (случай вполне неопределенной проблемы моментов (!)), то ряд*

$$H^{-1}(z) = \sum_{0}^{\infty} D_k^*(\bar{z})\, D_k(z)$$

сходится равномерно в каждой конечной части комплексной плоскости, при этом

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{\log \| H^{-1}(z) \|}{\| z \|} = 0.$$

Любое решение $T(\lambda)$ проблемы моментов (!) удовлетворяет неравенству

$$T(\xi + 0) - T(\xi - 0) \leqslant H^{-1}(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

Для фиксированного ξ знак $=$ здесь достигается для одного и только одного нормированного решения $T(\lambda) = T_\xi(\lambda)$, которое определяется из соотношения

$$(z-\xi)^{-1}\left[I + (z-\xi)\sum_1^\infty E_k^*(z)\, D_k(\xi)\right]\left[\sum_0^\infty D_k^*(z)\, D_k(\xi)\right]^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT_\xi(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z < 0).$$

Здесь

$$E_k(z) = \left\{ \frac{D_k(\lambda) - D_k(z)}{\lambda - z}, I \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k(\lambda) - D_k(z)}{\lambda - z}\, dT(\lambda).$$

Если $\nu_+ = \nu_- = p$, то ряды

$$\sum_1^\infty E_k^*(z)\, D_k(\zeta), \qquad \sum_1^\infty E_k^*(z)\, E_k(\zeta)$$

сходятся равномерно по совокупности переменных z и ζ в любой конечной части плоскости.

Образуем целые матрицы-функции

$$F_1(z) = I + z\sum_1^\infty E_k^*(z)\, D_k(0), \qquad F_2(z) = z\sum_1^\infty E_k^*(z)\, E_k(0),$$

$$G_1(z) = -z\sum_0^\infty D_k^*(z)\, D_k(0), \qquad G_2(z) = I - z\sum_1^\infty D_k^*(z)\, E_k(0).$$

Теорема 5. *Если $\nu_+ = \nu_- = p$, то все нормированные решения $T(\lambda)$ проблемы (!) находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех голоморфных в верхней полуплоскости матриц-функций p-го порядка $V(z)$ с $\| V(z) \| \leqslant 1$ $(\operatorname{Im} z > 0)$, так что*

$$[F_1(z)(I + V(z)) + iF_2(z)(I - V(z))]\,[G_1(z)(I + V(z)) + iG_2(z)(I - V(z))]^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Мы не останавливаемся здесь на связи, существующей между резольвентами (обычными и обобщенными) оператора A и решениями $T(\lambda)$ проблемы (!), которая, по сути, выяснена в нашей статье [1]. Заметим только, что в силу этой связи каждому самосопряженному расширению $\tilde{A}$ оператора A соответствует некоторая унитарная матрица U (и наоборот) такая, что спектр оператора $\tilde{A}$ будет совпадать с множеством корней уравнения $\det[G_1(z)(I + U) + iG_2(I - U)] = 0$.

Поступило
14 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Крейн, Украинск. матем. журн., № 2, 1 (1949). [2] H. Nagel, Math. Ann., 112, 247 (1936). [3] М. Крейн и М. Красносельский, Усп. матем. наук, 2, в. 3 (19) (1947).