Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 IX 1949)

1. Известен остроумный прием, принадлежащий Г. Крамеру и Г. Уолду ([1]), позволяющий сводить многие вопросы о многомерных функциях распределения к соответствующим вопросам об одномерных распределениях. Прием этот состоит в отнесении h-мерному случайному вектору $X(x_1, \ldots, x_h)$ совокупности одномерных случайных величин $Z_U = (U, X) = \sum_{i=1}^{h} u_i x_i$, соответствующих различным значениям вспомогательного вектора $U(u_1, \ldots, u_h)$, и основывается на том, что распределение всех Z_U однозначно определяют распределение вектора X. В частности, таким путем в ([1]) получено новое доказательство предельной теоремы для многомерных характеристических функций. Это дает основание авторам говорить, что центральная предельная теорема для h-мерных распределений выводится таким образом прямо из соответствующей предельной теоремы одного измерения (([1]), стр. 294).

Заметим, что указанный путь сохраняет необходимость при установлении той или иной конкретной формы центральной предельной теоремы для многомерных распределений вычислять и исследовать соответствующие многомерные характеристические функции. Это обстоятельство сообщает значительную громоздкость доказательствам этих теорем.

Существует другой путь, а именно, возможно, основываясь на доказываемой далее общей теореме, непосредственное сведение h-мерной предельной теоремы к ее частному случаю для одного измерения, минуя в каждом конкретном случае применение характеристических функций.

2. Речь идет о следующей общей теореме.

Теорема. *Пусть $X_n(x_{n1}, \ldots, x_{nh})$ и $Y_n(y_{n1}, \ldots, y_{nh})$, $n = 1, 2, \ldots$, — две последовательности случайных векторов, $F_{nk}(x)$ и $\Phi_{nk}(x)$ — функции распределения, соответственно, координат x_{nk} и y_{nk}, причем:*

а) $\int\limits_{|x| \geq N} d\Phi_{nk}(x) \to 0$ *при* $N \to \infty$ *равномерно для всех* $n = 1, 2, \ldots,$ *каково бы ни было* $k = 1, 2, \ldots, h$;

б) *функции* $\Phi_{nk}(x)$ *равностепенно непрерывны для всех* $k = 1, 2, \ldots, h$; $n = 1, 2, \ldots$

Если

$$\left| P\left\{ \sum_{i=1}^{k} u_i x_{ni} < x \right\} - P\left\{ \sum_{i=1}^{k} u_i y_{ni} < x \right\} \right| < \alpha_n \tag{1}$$

для всех x *и* $U(u_1, \ldots, u_h)$, *то*

$$|P\{X_n \in I\} - P\{Y_n \in I\}| < \omega(\alpha_n), \tag{2}$$

каков бы ни был интервал I, *где* $\omega(\alpha)$ — *вполне определенная функция* α *(зависящая, вообще говоря, от* Φ_{nk}*), для которой* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \omega(\alpha) = 0$. *(Интервал* I *есть множество точек* $X(x_1, \ldots, x_h)$, *определяемое условиями* $a_i \leqslant x_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, h$, *где* a_i, b_i — *некоторые определенные числа.* $P\{\ldots\}$ — *вероятность события, указанного в скобках.)*

Доказательство. В неравенстве (1) можем считать $\sum\limits_{i=1}^{h} u_i^2 = 1$. Из условий а) и (1) находим определенные функции $L(\alpha) \to \infty$ и $\omega_1(\alpha) \to 0$ (при $\alpha \to 0$) со свойством

$$\left| M\left[\exp\left(it \sum_{i=1}^{h} u_i x_{ni} \right) \right] - M\left[\exp\left(it \sum_{i=1}^{h} u_i y_{ni} \right) \right] \right| < \omega_1(\alpha_n) \text{ при } |t| \leqslant L(\alpha_n),$$

которое означает, что

$$|f_n(t_1, \ldots, t_h) - \varphi_n(t_1, \ldots, t_h)| < \omega_1(\alpha_n) \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{h} t_i^2 \leqslant L^2(\alpha_n), \tag{3}$$

где

$$f_n(t_1, \ldots, t_h) = M\left[\exp\left(i \sum_{i=1}^{h} t_i x_{ni} \right) \right]$$

и

$$\varphi_n(t_1, \ldots, t_h) = M\left[\exp\left(i \sum_{i=1}^{h} t_i y_{ni} \right) \right]$$

суть характеристические функции векторов X_n и Y_n. Соотношение (3), устанавливающее степень близости между характеристическими функциями f_n и φ_n, влечет за собой и близость между самими распределениями. А именно, благодаря условию б), при $T \to \infty$

$$P\{Y_n \in I\} = \frac{1}{(2\pi)^h} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{h} \frac{1 - \exp[-it_k(b_k - a_k)]}{it_k} \exp\left(-i \sum_{k=1}^{h} t_k a_k \right) \times$$
$$\times f_n(t_1, \ldots, t_h)\, dt_1 \ldots dt_h + o(1), \tag{4}$$

и, принимая во внимание (1), находим также, что

$$P\{X_n \in I\} = \frac{1}{(2\pi)^h} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{h} \frac{1 - \exp[-it_k(b_k - a_k)]}{it_k} \exp\left(-i \sum_{k=1}^{h} t_k a_k \right) \times$$
$$\times \varphi_n(t_1, \ldots, t_h)\, dt_1 \ldots dt_h + \omega_2(\alpha_n) + o(1), \tag{5}$$

где $\omega_2(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Соотношения (4) и (5) вместе с (3) приводят к доказываемому неравенству (2) с вполне определенной, эффективно вычислимой функцией $\omega(\alpha)$.

3. Покажем применение нашей общей теоремы на примере первой из доказанных многомерных теорем, принадлежащей С. Н. Бернштейну ((2), § 18; см. также (3), стр. 437—447).

Теорема. *Пусть* $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ *такие величины, что* x_k *и* y_k *связаны каким угодно образом, но* x_k *и* y_k *не зависят от* x_i

и y_i, *если* $i \gtrless k$; *пусть* $S_n = \sum\limits_1^n x_i, \quad \sigma_n = \sum\limits_1^n y_i, \quad M(x_i) = M(y_i) = 0,$

$A_n = M(S_n^2),\ C_n = M(\sigma_n^2),\ B_n = M(S_n \sigma_n) = R_n \sqrt{A_n C_n}.$

Тогда вероятность одновременного выполнения неравенств

$$t_0 \sqrt{2A_n} < S_n < t_1 \sqrt{2A_n}, \quad t_0' \sqrt{2C_n} < \sigma_n < t_1' \sqrt{2C_n},$$

при достаточно больших n *сколь угодно близка к*

$$\frac{1}{\pi \sqrt{1-R_n^2}} \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{t_0'}^{t_1'} \exp\left(-\frac{t^2 + t'^2 - 2R_n tt'}{1-R_n^2}\right) dt\, dt'. \tag{6}$$

если только

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n M(|x_i^3|)}{[(1-R_n^2)A_n]^{3/2}} = \varepsilon_n \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^n M(|y_i^3|)}{[(1-R_n^2)C_n]^{3/2}} = \varepsilon_n' \to 0. \tag{7}$$

Для доказательства рассмотрим величины $Z_{ni} = \dfrac{ux_i}{\sqrt{2A_n}} + \dfrac{vy_i}{\sqrt{2C_n}}$. Так как

$$\sum_i M(|\xi_i^2 \eta_i|) \leqslant \sum_i (M|\xi_i^3|)^{2/3} \cdot (M|\eta_i^3|)^{1/3} \leqslant \left(\sum_i M|\xi_i^3|\right)^{2/3} \cdot \left(\sum_i M|\eta_i^3|\right)^{1/3},$$

каковы бы ни были случайные величины ξ_i и η_i, то

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n M(|Z_{ni}|^3)}{\left[\sum\limits_{i=1}^n M(Z_{ni}^2)\right]^{3/2}} \leqslant \varepsilon_n + 3\varepsilon_n^{2/3}\varepsilon_n'^{1/3} + 3\varepsilon_n^{1/3}\varepsilon_n'^{2/3} + \varepsilon_n' \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поэтому к $\sum\limits_{i=1}^n Z_{ni}$ приложима теорема Ляпунова, иначе говоря, разность

$$P\left\{\sum_{i=1}^n Z_{ni} < x\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2\beta_n}\right) dz =$$

$$= P\left\{\sum_{i=1}^n Z_{ni} < x\right\} -$$

$$- \frac{1}{\pi\sqrt{1-R_n^2}} \iint\limits_{\left(\frac{ut}{\sqrt{2A_n}} + \frac{vt'}{\sqrt{2C_n}} < x\right)} \exp\left(-\frac{t^2 + t'^2 - 2R_n tt'}{1-R_n^2}\right) dt\, dt',$$

где

$$\beta_n = \sum_{i=1}^n M(Z_{ni}^2) = \frac{1}{2}(u^2 + 2R_n uv + v^2),$$

равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, каковы бы ни были x, u и v, т. е. выполнено условие (1) теоремы п. 2 с $\alpha_n \to 0$. Условия а) и б) очевидны для распределения, определяемого функцией (6). Следовательно, выполняется (2), откуда и вытекает справедливость доказываемой теоремы.

Так же легко может быть изложено доказательство и несколько более общей теоремы, принадлежащей А. Я. Хинчину ([4]), где вместо условий (7) типа Ляпунова фигурируют условия типа Линдеберга.

Применение теоремы п. 2 к многомерным неоднородным цепям будет дано в следующей заметке автора.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступило
9 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer and H. Wold, Journ. London Math. Soc., 11, 290 (1936). [2] С. Н. Бернштейн, Усп. мат. наук, 10, 65 (1944). [3] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, 1946. [4] А. Я. Хинчин, Изв. Асс. н.-и. ин-тов при физ.-мат. фак. 1 МГУ, 1, 37 (1928).