Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ, ЯВЛЯЮЩИМСЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 IX 1949)

1. Пусть $\overline{F}(a, b, c, x)$ обозначает главную ветвь гипергеометрической функции*.

В предположении, что: 1) $\alpha+1>\gamma>\alpha>0$, $\gamma\geqslant 1/2$; 2) *функция* $x^\gamma e^{\pi x} f(x)\subset L(0,\infty)$ *и* 3) *функция* $f(x)$ *удовлетворяет на любом конечном интервале в промежутке* $(0,\infty)$ *условиям Дирихле, имеет место для* $x>0$ *следующая формула*:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^\infty \overline{F}(\alpha+xi,\ \alpha-xi,\ \gamma,\ -\xi)\, S_2(\alpha,\gamma,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где

$$\varphi(\xi)=\int_0^\infty \overline{F}(\alpha+\beta i,\ \alpha-\beta i,\ \gamma,\ -\xi)\, S_1(\alpha,\gamma,\beta) f(\beta)\,d\beta \tag{2}$$

и

$$S_1(\alpha,\gamma,x)=\frac{x\,\mathrm{sh}\,2\pi x}{\pi^2[\Gamma(\gamma)]^2}\Gamma(\alpha+xi)\Gamma(\alpha-xi)\Gamma(\gamma-\alpha+xi)\Gamma(\gamma-\alpha-xi), \tag{3}$$

$$S_2(\alpha,\gamma,x)=x^{\gamma-1}(1+x)^{2\alpha-\gamma}. \tag{4}$$

---

* Т. е., в частности (см. [1], стр. 72—73):

$$\overline{F}(a,b,c,z)=F(a,b,c,z),\quad \text{если}\ |z|<1; \tag{5^1}$$

$$\overline{F}(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a,1-c+a,1+a-b,\frac{1}{z}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b,1-c+b,1+b-a,\frac{1}{z}\right),$$

$$\text{если}\ |z|>1\ \ \text{и}\ \ |\arg(-z)|<\pi; \tag{5^2}$$

здесь $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрический ряд.

Единое аналитическое выражение для $\overline{F}(a, b, c, z)$, пригодное в области X_1, состоящей из всей плоскости комплексного переменного z с разрезом вдоль оси x от 1 до ∞, при $R(c)>R(b)>0$ дается известным интегралом Эйлера ([1], стр. 79). Из него, в частности, легко получается следующее неравенство:

$$|B(b,c-b)\,\overline{F}(a,b,c,-z)|\leqslant B(Rb,\,R(c-b)) \tag{6}$$

при $R(a)>0$, $R(c)>R(b)>0$ и $z\geqslant 0$, т. е.

$$\sqrt{S_1(\alpha,\gamma,\beta)}\,|\overline{F}(\alpha+\beta i,\ \alpha-\beta i,\gamma,-\mathrm{sh}^2(s/2))|\leqslant K\sqrt{\beta\,\mathrm{sh}\,2\pi\beta} \tag{6$'$}$$

при $\gamma>\alpha>0$, здесь $K=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\pi\Gamma(\gamma)}$. Заметим, что $S_1(\alpha,\gamma,\beta)=O(\beta^{2\gamma-1})$.

2. Формулы (1), (2) являются источником многих формул обращения. Так, например, при $\alpha = p + 1/2$, $\gamma = p + 1$ мы получаем представление функции $f(x)$ по функциям Лежандра — Хобсона, отмеченное нами в ([3]), из которого, в частности, при $p = 0$ следует формула статьи ([4]) В. А. Фока. При $\alpha = 1$, $\gamma = 3/2$ и $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1/2$ наша формула обращается соответственно в sin- и cos-формулы Фурье.

3. Рассмотрим гипергеометрическое уравнение

$$x(1-x)y'' + (\gamma - \delta x)y' + \varepsilon y = 0, \quad \delta = 2\alpha + 1, \quad -\varepsilon = \alpha^2 + \beta^2. \tag{7}$$

Приводя его к самосопряженной форме и обозначая через $y_k \equiv y(\alpha, \beta_k, \gamma, x)$, $k = 1, 2$, функции, удовлетворяющие уравнению (7), соответственно, при $\beta = \beta_k$ $(k = 1, 2)$, легко установить при $\gamma > 0$ справедливость следующего тождества:

$$\int_0^\omega x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-\gamma-1} y_1 y_2 \, dx = \frac{\omega^\gamma (1-\omega)^{\delta-\gamma}}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (y_1' y_2 - y_2' y_1)\Big|_{x=\omega}. \tag{8}$$

Принимая в равенстве (8) $y_k \equiv \overline{F}(\alpha + i\beta_k, \alpha - i\beta_k, \gamma, x)$ и полагая в нем $x = -\operatorname{sh}^2(s/2)$, $\omega = -\operatorname{sh}^2(\Omega/2)$, находим

$$\Phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \Omega) \equiv$$

$$\equiv \int_0^\Omega \left(\operatorname{th}\frac{s}{2}\right)^{2\gamma-1} \left(\operatorname{ch}\frac{s}{2}\right)^{4\alpha} F_1(\alpha, \beta_1, \gamma, s)\, F_1(\alpha, \beta_2, \gamma, s)\, ds =$$

$$= p\{(\alpha^2 + \beta_1^2) F_1(\alpha + 1, \beta_1, \gamma + 1, \Omega) F_1(\alpha, \beta_2, \gamma, \Omega) -$$

$$-(\alpha^2 + \beta_2^2) F_1(\alpha + 1, \beta_2, \gamma + 1, \Omega) F_1(\alpha, \beta_1, \gamma, \Omega)\}; \tag{9}$$

где введены следующие обозначения:

$$\gamma(\beta_1^2 - \beta_2^2) p = \left(\operatorname{th}\frac{\Omega}{2}\right)^{2\gamma} \left(\operatorname{ch}\frac{\Omega}{2}\right)^{4\alpha+2},$$

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, s) = \overline{F}(\alpha + \beta i, \alpha - \beta i, \gamma, -\operatorname{sh}^2(s/2)). \tag{10}$$

4. С целью вычислить предел интеграла

$$L \equiv \int_c^d \Phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \Omega)\, d\beta_1, \quad d > c > 0, \tag{11}$$

при $\Omega \to \infty$, заметим, что из выражения (5^2) легко получить следующее асимптотическое по Ω выражение для функции $\overline{F}$:

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, \Omega) \simeq \left(\operatorname{sh}\frac{\Omega}{2}\right)^{-2\alpha} [C(\alpha, \beta, \gamma)\cos\beta\Omega + D(\alpha, \beta, \gamma)\sin\beta\Omega]\,^*, \tag{12}$$

где $C(\alpha, \beta, \gamma)$ и $-iD(\alpha, \beta, \gamma)$ представляют собой, соответственно, сумму и разность функций $M(\alpha, \beta, \gamma)$ и $M(\alpha, -\beta, \gamma)$, а M определяется равенством:

$$2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha + \beta i)\,\Gamma(\gamma - \alpha + \beta i)\, M(\alpha, \beta, \gamma) = \Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta i)\,\Gamma(\beta i + 1/2),$$

при этом заметим, что $\pi S_1(\alpha, \gamma, \beta)(C^2 + D^2) = 2$.

---

* Воспользовавшись неравенством (6) для гипергеометрических рядов, стоящих в правой части (5^2), легко обнаружить, что при условии $\alpha + 1 > \gamma > \alpha > 0$ и $\operatorname{sh}(s/2) > 1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{S_1(\alpha, \gamma, \beta)}\, \operatorname{sh}^{2\alpha}\frac{s}{2} \left|\overline{F}(\alpha + \beta i, \alpha - \beta i, \gamma, -\operatorname{sh}^2(s/2))\right| \leqslant \frac{2\sqrt{\beta}}{q} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \pi\beta + q^2}{\operatorname{sh} 2\pi\beta}}, \tag{13}$$

где $q = \sin\pi(\gamma - \alpha)$.

Выражение в фигурных скобках (9), учитывая (12), асимптотически равно

$$\left(\operatorname{sh}\frac{\Omega}{2}\right)^{-4\alpha-2}\{(A_1-B_1)\cos(\beta_1+\beta_2)\Omega+(A_1+B_1)\cos(\beta_1-\beta_2)\Omega+ \\ +(A_2-B_2)\sin(\beta_1+\beta_2)\Omega+(A_2+B_2)\sin(\beta_1-\beta_2)\Omega\},$$

где $8\pi(A_2\mp B_2)$ обозначает следующее:

$$(\alpha^2+\beta_1^2)[C(\alpha,\beta_2,\gamma)D(\alpha+1,\beta_1,\gamma+1)\pm C(\alpha+1,\beta_1,\gamma+1)D(\alpha,\beta_2,\gamma)]- \\ -(\alpha^2+\beta_2^2)[C(\alpha+1,\beta_2,\gamma+1)D(\alpha,\beta_1,\gamma)\pm C(\alpha,\beta_1,\gamma)D(\alpha+1,\beta_2,\gamma+1)];$$

аналогичное выражение для $8\pi(A_1\mp B_1)$ мы не приводим. Существенно заметить, что из четырех двучленов $A_i\mp B_i$ лишь A_2+B_2 не обращается в нуль при $\beta_1=\beta_2$.

На основании известной теоремы Дирихле, легко видеть, что

$$\lim_{\Omega\to\infty} L=\lim_{\Omega\to\infty}\left(\operatorname{th}\frac{\Omega}{2}\right)^{2\gamma-4\alpha-2}\int_c^d\frac{\sin(\beta_1-\beta_2)\Omega}{\beta_1^2-\beta_2^2}(A_2+B_2)\,d\beta_1=\frac{Q}{S_1(\alpha,\gamma,\beta_2)},\quad(14)$$

где $Q=1$, если $0\leqslant c<\beta_2<d$; $Q={}^1/_2$ при $\beta_2=c$ или $\beta_2=d$ и $Q=0$, если $\beta_2<c$ или $\beta_2>d$.

5. Пусть $f(x)$ удовлетворяет в $c\leqslant x\leqslant d$ условиям Дирихле. Предположим, в начале, также и монотонность $S_1(\alpha,\gamma,x)f(x)$ в рассматриваемом интервале. Тогда, по второй теореме о среднем,

$$I[c,d]\equiv\int_c^d S_1(\alpha,\gamma,\beta)f(\beta)\Phi(\alpha,\beta,\beta_2,\gamma,\Omega)\,d\beta=$$

$$=S_1(c)f(c)\int_c^d\Phi\,d\beta+[S_1(d)f(d)-S_1(c)f(c)]\int_\xi^d\Phi\,d\beta,\quad c\leqslant\xi\leqslant d\,^*.$$

Если $\beta_2<c$ или $\beta_2>d$, то отсюда и из формулы (14) следует, что $\lim I[c,d]=0$ при $\Omega\to\infty$.

Аналогично, применяя вторую теорему о среднем к $I[\beta_2,c]$ и используя формулу (14), получаем

$$\lim_{\Omega\to\infty} I[\beta_2,c]=\frac{1}{2}f(\beta_2)+[S_1(c)f(c)-S_1(\beta_2)f(\beta_2)]\lim\int_{\xi'}^c\Phi\,d\beta,$$

где $\beta_2\leqslant\xi'\leqslant c$. Учитывая, что $I[\beta_2,d]=I[\beta_2,c]+I[c,d]$ и снова пользуясь формулой (14), находим

$$\lim_{\Omega\to\infty} I[\beta_2,d]=\begin{cases}{}^1/_2 f(\beta_2), & \text{если } \xi'>\beta_2,\\ S_1(c)f(c)/2S_1(\beta_2), & \text{если } \xi'=\beta_2.\end{cases}$$

Но так как интеграл в левой части не зависит от величины c, то значение $\xi'=\beta_2$, очевидно, невозможно, а следовательно, $\lim\limits_{\Omega\to\infty} I[\beta_2,d]={}^1/_2 f(\beta_2)$, и, точно так же, $\lim\limits_{\Omega\to\infty} I[c,\beta_2]={}^1/_2 f(\beta_2)$. Таким образом,

* Здесь и ниже мы для сокращения у функции $S_1(\alpha,\gamma,\beta)$ не ставим первых ее аргументов.

$$\lim_{\Omega\to\infty}\int_c^d S_1(\alpha, \gamma, \beta) f(\beta)\,\Phi(\alpha, \beta, \beta_2, \gamma, \Omega)\,d\beta = f(\beta_2)\ *, \tag{15}$$

если $0 \leqslant c < \beta_2 < d$; при $\beta_2 = c$ или $\beta_2 = d$ предел интеграла, стоящий в левой части (15), равен $^1/_2 f(\beta_2)$, и, наконец, он равен 0 при $\beta_2 \not\subset (c, d)$.

Очевидно, что предположение о монотонности $S_1(\beta) f(\beta)$ в (c, d) несущественно, ибо, если оно не осуществляется, то достаточно интервал (c, d) разбить на ряд интервалов, в каждом из которых это будет иметь место (что, согласно предположению о функции f и свойству функции S_1, возможно), и формула (15) остается в силе.

6. При условии абсолютной интегрируемости в промежутке $(0, \infty)$ функции $\sqrt{S_1(\beta)}\,f(\beta)$ и $\gamma \geqslant {}^1/_2$ интегрирование по β в формуле (15) можно распространить до ∞. В самом деле, пользуясь тождеством (9), асимптотическим выражением по β для функции $\overline{F}(\alpha + \beta i, \alpha - \beta i, \gamma, -\operatorname{sh}^2(s/2))$, а именно (см. [2], стр. 307)

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, s) \cong \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}}\left(\beta \operatorname{th}\frac{s}{2}\right)^{1/2-\gamma}\left(\operatorname{ch}\frac{s}{2}\right)^{-2\alpha}\cos\left[\beta s + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\right]$$

и оценкой (13), легко видеть, что $\sqrt{S_1(\beta)}\,\Phi(\alpha, \beta, \beta_2, \gamma, \Omega)$ при постоянном значении $\beta_2 > 0$ с возрастанием β стремится к нулю равномерно относительно Ω. Поэтому и $\displaystyle\int_d^g S_1(\beta) f(\beta)\,\Phi(\alpha, \beta, \beta_2, \gamma, \Omega)\,d\beta,\quad g > d,$ может быть сделан сколь угодно малым и притом равномерно относительно Ω и g.

Учитывая, что по предположению $x^\gamma e^{\pi x} f(x) \subset L(0, \infty)$, легко видеть, что интеграл $\displaystyle\int_0^\infty\left(\operatorname{th}\frac{s}{2}\right)^{2\gamma-1}\left(\operatorname{ch}\frac{s}{2}\right)^{4\alpha} F_1(\beta, s)\,F_1(\beta_2, s)\,S_1(\beta) f(\beta)\,d\beta$ равномерно сходится относительно s на отрезке $0 \leqslant s \leqslant \Omega$ (см. неравенства (6′) и (13)), в силу чего мы вправе переменить порядок интегрирования в левой части формулы (15) (после замены функции Φ ее выражением в виде интеграла (9)) и таким образом приходим к результатам п. 1.

Замечание. Условия п. 1 относительно функции $f(x)$, как и неравенства для α и γ, могут быть существенно смягчены и расширены. В частности, пользуясь более точными оценками для функции $F_1(\alpha, \beta, \gamma, s)$, чем неравенства (6) и (13), можно установить справедливость нашей формулы в предположении, что: 1) $\gamma > \alpha > 0$, $\gamma \geqslant {}^1/_2$, 2) $x^{\gamma-\frac{1}{2}} f(x) \subset L(0, \infty)$ и 3) функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки x.

Поступило
1 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, 1934.
[2] E. W. Hobson, Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge, 1931.
[3] М. Н. Олевский, ДАН, 40, № 1 (1943). [4] В. А. Фок, ДАН, 39, № 7 (1943).

* Следует заметить, что, если $\beta = \beta_2$, точка разрыва функции $f(\beta)$ в (c, d), тогда $f(\beta_2)$ в правой части (15) должна быть заменена полусуммой $^1/_2[f(\beta_2 + 0) + f(\beta_2 - 0)]$.