Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

М. И. ЕЛЬШИН

К ДЕКРЕМЕНТНОЙ ОЦЕНКЕ АМПЛИТУД

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 IX 1949)

1. Как установлено в моей статье [1], во всех представлениях общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{1}$$

на интервале

$$a < t < b, \tag{2}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ непрерывны, в виде

$$x = \frac{C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p\,d\xi\right)}{\sqrt{|\omega|}} \cos\left[\int\limits_{t_0}^{t} \omega\,d\xi + C_2\right], \tag{3}$$

при C_1 и C_2 произвольных постоянных, частоты $\omega(t)$, непрерывные на (2) вместе со всей производной, удовлетворяют квази-дифференциальному уравнению:

$$J\left[-\frac{\omega'}{2\omega}; (p, q)\right] = \omega^2 \tag{4}$$

и являются знакопостоянными функциями, не обращающимися в нуль на интервале (2).

В этой статье решаются проблемы о выделении из функционального пространства

$$R \equiv \{p, q\}, \tag{5}$$

всех дифференциальных уравнений с непрерывными на интервале (2) коэффициентами многообразий R_1, $R_2 \subset R_1$ и R_3, на которых на интервале $t_0 \leqslant t < b$ $(a < t \leqslant t_0)$ амплитуды

$$\rho(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p\,d\xi\right)}{\sqrt{|\omega|}}, \tag{6}$$

соответственно, ограничены, затухают или неограничены.

Введенная здесь декрементная форма представления уравнения (1) дает возможность получить необходимые и достаточные условия наличия каждого из этих случаев и указать вполне эффективный метод для решения задач при любых $p(t)$ и $q(t)$, непрерывных на интервале (2).

2. Считая θ произвольной допустимой функцией, непрерывной на интервале (2) и допускающей на нем непрерывную производную для $\theta - \frac{p}{2}$, подстановкой

$$x = y \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\left(\theta - \frac{p}{2}\right) d\xi\right] \tag{7}$$

приведем уравнение (1) к виду:

$$y'' + 2\theta y' + J[\theta; (p, q)]\, y = 0, \tag{8}$$

связывая, тем самым, с каждой точкой функционального пространства (5) характеристический оператор:

$$J[\theta; (p, q)] = \left(\theta - \frac{p}{2}\right)' + \theta^2 + q - \frac{p^2}{4}. \tag{9}$$

Представление (8) в самосопряженной форме

$$(Ky')' + Gy = 0 \tag{10}$$

дает

$$K[\theta] = \exp\left(-2\int\limits_{t_0}^{t} \theta\, d\xi\right); \quad G[\theta; (p, q)] = K \cdot J. \tag{11}$$

Каждой точке пространства (5) соответствует подмножество допустимых θ, на котором характеристический оператор дает не равные нулю, положительные функции, имеющие непрерывную производную. Часть такого подмножества получается, например, при

$$\theta = -\frac{\omega'}{2\omega} + \mu\omega, \tag{12}$$

где ω — одна из частот уравнения (1), а μ — произвольная непрерывная на интервале (2) функция, имеющая на нем две непрерывные производные.

В самом деле, для таких θ, в силу (4), найдем:

$$J[\theta; (p, q)] = (1 + \mu^2)\,\omega^2 + \mu'\omega \tag{13}$$

и, следовательно, (13) дифференцируема и μ может быть подобрано так, чтобы правая часть (13) была положительна на всем интервале (2) и нигде не обращалась в нуль.

Каждому уравнению (1) с непрерывными на (2) коэффициентами соответствует свое подмножество допустимых θ, на котором оно преобразуется к виду:

$$\left(\frac{\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda\, d\xi}{\omega_1}\, y'\right)' + y\omega_1 \exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda\, d\xi = 0, \tag{14}$$

где обозначено:

$$\omega_1[\theta; (p, q)] = \sqrt{J}; \quad \lambda[\theta; (p, q)] = \frac{4\theta J - J'}{J}, \tag{15}$$

причем оператор λ будем называть декрементом уравнения (1).

3. Справедливы следующие теоремы:

1°. *Многообразие функционального пространства* (5), *на котором амплитуды* (6) *ограничены, определяется наличием допустимых* θ, *при которых*:

$$\lambda \geqslant 0; \quad \varlimsup_{t\to c}\int\limits_{t_0}^{t}\left(\theta - \frac{p}{2}\right) d\xi < \infty, \quad c = b \ \ (c = a). \tag{16}$$

2°. *Многообразие функционального пространства* (5), *на котором амплитуды* (6) *затухают, определяется наличием допустимых* θ, *при которых:*

$$\lambda \geqslant 0; \quad \lim_{t \to c} \int_{t_0}^{t} \left(\theta - \frac{p}{2}\right) d\xi = -\infty; \quad c = b \ (c = a). \tag{17}$$

3°. *Многообразие функционального пространства* (5), *на котором амплитуды* (6) *неограничены, определяется наличием допустимых* θ, *при которых*

$$\lambda \leqslant 0; \quad \overline{\lim_{t \to c}} \int_{t_0}^{c} \left(\theta - \frac{p}{2}\right) d\xi = +\infty, \quad c = b \ (c = a). \tag{18}$$

Сначала докажем необходимость этих условий. Для этого заметим, что для θ, определяемых (12):

$$\lambda = \frac{-\omega' \mu' + 6\mu\mu' \omega^2 + 4\mu (1 + \mu^2) \omega^3 + \omega\mu''}{(1 + \mu^2) \omega^2 + \omega\mu'}, \tag{19}$$

а потому, пользуясь произволом выбора μ, соответственно с характером изменения частоты ω, определяемого коэффициентами уравнения (1), всегда можно сделать: $J > 0$ и $\lambda \geqslant 0$, или $J > 0$ и $\lambda \leqslant 0$, и даже, при $\mu = 0$: $J > 0$ и $\lambda \equiv 0$.

Замечая, что

$$\exp \int_{t_0}^{t} \left(\theta - \frac{p}{2}\right) d\xi = \rho(t) \exp \int_{t_0}^{t} \mu\omega \, d\xi, \tag{20}$$

факт совместности требований, наложенных на μ, с дополнительным условием

$$\overline{\lim_{t \to c}} \left| \int_{t_0}^{t} \mu\omega \, d\xi \right| < \infty, \quad c = b \ (c = a), \tag{21}$$

доказывает необходимость условий (16), (17) и (18) для сформулированных утверждений.

Для доказательства достаточности условий (16) и (17) умножим уравнение (14) на скобку, стоящую в его левой части, и проинтегрируем полученный результат в пределах от t_1 до t_2 ($b > t_2 > t_1$ или $a < t_2 < t_1$), соответствующим последовательным максимумам y^2, из которых $y^2(t_2) > y_1^2(t_1)$. Тогда, в силу $\lambda \geqslant 0$, имеем

$$y^2(t_2) < y^2(t_1). \tag{22}$$

Полученное противоречие доказывает утверждение, ибо y не может расти неограниченно и из (16) и (17), в силу (7), вытекают заключения 1° и 2°.

Для доказательства достаточности (17) проводим те же рассуждения и из предположения, что $y^2(t_2) < y^2(t_1)$, в силу $\lambda \leqslant 0$, получаем

$$y^2(t_2) > y^2(t_1). \tag{23}$$

4. Доказанные нами теоремы имеют следующий механический смысл.

Уравнение

$$y'' + \left(\lambda - \frac{\omega_1'}{2\omega_1}\right) y' + \omega_1^2 y = 0 \tag{24}$$

эквивалентно (14). Оно описывает движение, получающееся из

$$y'' = C_1 \cos\left[\int_{t_0}^{t} \omega_1 d\xi + C_2\right], \tag{25}$$

удовлетворяющего уравнению

$$y'' - \frac{\omega_1'}{2\omega_1} y' + \omega_1^2 y = 0 \tag{26}$$

добавлением силы трения $\lambda y'$.

В заключение заметим, что приведение уравнения (1) к виду (14) тесно связано с преобразованием (7) при произвольном допустимом θ; при $\theta = 0$, соответствующем классическому приведению (1) к каноническому виду, оно, вообще говоря, невозможно. Каждому выражению θ, удовлетворяющему (16), (17) или (18), отвечает достаточное условие для соответствующего заключения. Однако каждое из этих условий может охватывать только узкие классы уравнений, ибо подмножества допустимых θ, на которых определен декремент, могут оказаться различными для разных точек пространства (5).

Среди полученных таким образом условий можно получить все до сих пор известные и большое количество новых. Однако для практических применений нет необходимости на них ссылаться, ибо для каждого конкретного уравнения проблема решается путем выяснения принадлежности или непринадлежности точки (p, q), его определяющей, к одному из многообразий функционального пространства (5), заданных (16), (17) или (18).

Поступило
7 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Ельшин, ДАН, 68, № 2 (1949).