Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

И. А. ВИЛЬНЕР

ПРИВЕДЕНИЕ НОМОГРАФИРУЕМОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1949)

Если $F(w; z) = 0$ номографируема, то постоянные z_0' и w_0' в канонической форме зависимостей второго класса

$$w - w_0' = A' \int_0^{z-z_0'} \wp\,(\sigma; g_2'; g_2') - B']^{-1/2}\, d\sigma$$

могут быть найдены из системы $F(w_0'; z_0') = 0$, $F_z(w_0'; z_0')/F_w(w_0'; z_0') = 0$ (см. равенство (3,4) работы ([5])).

1. Пусть: $\wp = \wp(\xi; g_2'; g_3')$, причем $e'_{i,j,k}$ — корни $\wp$-функции Вейерштрасса, соответствующие действительным инвариантам g_2' и g_3' (через e_k', пока не оговорено противное, будем обозначать заведомо действительный корень);

$$k = m_i = [(e_j' - e_k')/(e_i' - e_k')]^{1/2};\quad m_j = m_i^{-1};\ \Delta(g) = g_2^3 - 27\, g_3^2;$$

$$u'_{i,j} = e_k' + (e'_{i,j} - e_k')\ \mathrm{sn}^2(\xi\sqrt{e'_{i,j} - e_k'};\ m_{i,j});\ \ v_1' = e_k' - 3e_k' \sin^{-2}(\xi\sqrt{-3e_k'});$$

$$v_2' = e_k' - \frac{3}{2} e_k' \,\mathrm{cth}^2\Big(\xi\sqrt{-\frac{3}{2}e_k'}\Big);\ k_1 = ik'/k;$$

$$k_2 = k_1[(B' - e_k')/(B' - e_i')]^{1/2};\ \ \rho_2 = \varepsilon_1 ikK(k),$$

где
$$\varepsilon_1 = \pm 1;\ h(u) = iku + \varepsilon_1 ikK(k);\ \ M_1 = (e_k' - e_j')^{-1/2};$$
$$M_2 = A'\varepsilon_1[(B' - e_i')(e_j' - e_k')]^{-1/2};$$

$$R_1 = A'\varepsilon_1/(e_i' - e_k');\quad M_2' = \lim_{B' \to e_i'} (M_2/ik_2) \equiv R_1/ikk_1;\ M_2'' = -M_2';$$

$$\delta_1 = \arcsin \mathrm{sn}(\rho_2; k_1) \equiv \arcsin(\varepsilon_1 ik/k');$$

$$z_{01}'' = z_0' - \varepsilon_1 kK(k)(e_j' - e_k')^{-1/2};\quad \nu_1 = (z - z_{01}'')/M_1;$$

$$\rho_1 = (z - z_0')\sqrt{e_i' - e_k'};\ \rho_3 = h(\rho_1);\ w_{01}'' = w_0' - M_2\int_0^{\delta_1}(1 - k_2^2\sin^2\xi)^{-1/2};$$

$$\mathrm{sn}(\rho_3; k_1) \equiv \mathrm{sn}(\nu_1; k_1) \equiv \frac{\varepsilon_1 ik}{k'}\mathrm{cn}(\rho_1; k);\quad \delta_2 = \arcsin \mathrm{sn}(\rho_3; k_1);$$

$$\delta_3^2 = (e_i' - B')/(e_i' - e_k');\quad \delta_4^2 = (B' - e_k')/(e_i' - e_k');$$

$$w_0''' = \lim_{B' \to e_i'} w_{01}'' \equiv w_0' - M_2'' \ln \mathrm{tg}\frac{\delta_1}{2};\ \mu = (w - w_0''')/M_2'';\ \sigma \equiv s + ti = \arcsin \mathrm{sn}(\nu_1; k_1);$$

$$\tau_1 = 3a/b = \mathrm{sh}(2\alpha_1);\ N_1 = b^{1/2},\ \lambda = b(B' + 2a)^{-1};\ \tau_2 = \tau_1 - \lambda\tau_1^2 - \lambda = \mathrm{sh}(2\alpha_2);$$

$$N_2 = -A'\varepsilon_1 2^{-1/2}(e_k - B')^{-1/2};\ s_1 = \sqrt{2(1+\tau_1 i)^{-1}} \equiv \sqrt{2}(\operatorname{ch}\alpha_1 + i\operatorname{sh}\alpha_1)^{-1};$$

$$s_2 = \sqrt{2(1+\tau_2 i)^{-1}} \equiv \sqrt{2}(\operatorname{ch}\alpha_2 + i\operatorname{sh}\alpha_2)^{-1};\ s_3 = N_1 s_1 (1+i)^{-1};\ s_4 = N_2 s_2 (1+i)^{-1};$$

$$L_1 = 3^{-1}M_1^{-2}(k_2^2 - k_1^2)^{-1}(k_1^4 + 2k_1^2 k_2^2 - 2k_1^2 - k_2^2);\ L_2 = M_2^2 M_1^{-4}(k_1^2 - k_1^4)(k_2^2 - k_1^2)^{-1};$$

$$L_3 = 3^{-1}M_1^{-2}(2 - k_1^2);\ L_4 = 3^{-1}M_1^{-2}(2k_1^2 - 1);\ L_5 = -3^{-1}M_1^{-2}(1 + k_1^2);$$

$$L_6 = 4\cdot 3^{-1}M_1^{-4}(1 - k_1^2 + k_1^4);\ L_7 = 4\cdot 27^{-1}M_1^{-6}(2k_1^2 - 1)(1 + k_1^2)(2 - k_1^2);$$

$$L_8 = 16 M_1^{-12} k_1^4 (1 - k_1^2);\ L_9 = 4\cdot 27^{-1} k_1^{-4}(1 - k_1^2)^{-2}(1 - k_1^2 + k_1^4)^3;$$

$$k_1'^2 = 1 - k_1^2;\ \nu_2 = \frac{w - w_{01}''}{M_2}.$$

Через a, b, $\tau_{1,2}$, λ и B' обозначены произвольные действительные числа; через A', $N_{1,2}$ — произвольные числа с действительными квадратами.

2. Воспользуемся известными соотношениями $\wp = u_i'$ либо $\wp = u_i'$. Если $\Delta(g') = 0$, причем имеются только два одинаковых корня, то надо пользоваться тем из этих соотношений, которое не делается неопределенным. Так, если $e_j' = e_k'$, то $e_i' = -2e_k'$ и $\wp = v_1'$. Если же $e_i' = e_j'$, то $e_i' = e_j' = -e_k'/2$ и $\wp = v_2'$. Если $e_i' = e_k'$, надо пользоваться соотношением $\wp = u_j'$, и опять получим, что $\wp = v_1'$. Наконец, если $e_i' = e_j' = e_k' = 0$, то $\wp = \xi^{-2}$. Сверх того, воспользуемся тождеством $\operatorname{sn}(u; k) \equiv -\varepsilon_1 \operatorname{dn}[h(u); k_1]$ при $k \neq 0, 1, \infty$, или, что то же, при $e_i' \neq e_j' \neq e_k'$ ($\Delta(g') \neq 0$). При $\Delta(g') = 0$ достаточно в формуле (3, 4) работы ([5]) заменить $\wp$-функцию указанными в этом параграфе ее выражениями в случаях вырождения, на чем здесь не останавливаемся (результат см. в § 5 работы ([3])).

3. С помощью формул § 1 получим последовательно в общем случае (т. е. при $\Delta(g') \neq 0$) из (3, 4) работы ([5])

$$w - w_0' = A'\int_0^{z-z_0'} \sqrt{u_{i,j}' - B'}\,d\xi \equiv R_1\int_0^{\rho_1}[\delta_3^2 - k_1^2\delta_4^2 \operatorname{sn}^2(h(\xi); k_1)]^{-1/2}\operatorname{dn}[h(\xi); k_1]\,d\xi \equiv$$

$$\equiv M_2\int_{\rho_2}^{\rho_3}[1 - k_2^2\operatorname{sn}^2(\xi; k_1)]^{-1/2}\operatorname{dn}(\xi; k_1)\,d\xi \equiv M_2\int_{\delta_1}^{\delta_2}[1 - k_2^2\sin^2\xi]^{-1/2}\,d\xi.$$

Мы предположим сначала, что $B' \neq e_{i,j,k}'$. Тогда вместо (3, 4) работы ([5]) получим $w - w_{01}'' = M_2\int_0^{\sigma}(1 - k_2^2\sin^2\xi)^{-1/2}\,d\xi$.

Пользуясь формулой, определяющей вспомогательную комплексную переменную σ (см. § 1), получаем две зависимости первого класса (3, 1) с общей σ-прямолинейной переменной. Эти две зависимости дают в параметрической форме зависимость (3, 4) работы ([5]), причем здесь z_{01}'' и w_{01}'' суть функции g_2', g_3', A' и B'.

$$\sigma = \operatorname{amp}(\nu_1; k_1),\ \sigma = \operatorname{amp}(\nu_2; k_2), \tag{3,1}$$

$$z - z_{01}'' = M_1\int_0^{\sigma}(1 - k_1^2\sin^2\xi)^{-1/2}\,d\xi,\ w - w_{01}'' = M_2\int_0^{\sigma}(1 - k_2^2\sin^2\xi)^{-1/2}\,d\xi.$$

Формулы (3, 1) можно записать и в непараметрической нормальной форме неэлементарных (так как $\Delta(g') \neq 0$ и, значит, $k_1 \neq k_2 \neq 0, 1$) зависимостей второго класса (3,2), которая совпадает с результататом 1° § 5 работы [3]. Нормальная форма (3, 2) для (3, 1) дает зависимость первого класса при $\Delta(g') \neq 0$, только если $B' = e'_{i,j,k}$

$$\operatorname{amp}(\nu_1; k_1) = \operatorname{amp}(\nu_2; k_2). \tag{3,2}$$

При $B' = e'_k$ $k_2 = 0$; получаем из (3,1) или (3,2) неэлементарные зависимости первого класса: первую неэлементарную форму [1] при $\Delta(g') > 0$ и вторую неэлементарную форму [2,3] при $\Delta(g') < 0$, причем w — прямолинейная переменная в обоих предположениях. При $B' = e'_j$ получим $k_2 = 1$ и (3,2) примет вид [4] неэлементарной зависимости первого класса с w — прямолинейной переменной: $\operatorname{th}\nu_2 = \operatorname{sn}(\nu_1; k_1)$. Действительно, обращая последнее соотношение, получим:

$$i\nu_1 = \int_0^{i\nu_2} (1 - k_1'^2 \sin^2\xi)^{-1/2}\, d\xi,$$

т. е. получаем первую неэлементарную нормальную форму первого класса, поскольку из предположения $B' = e'_j$ следует действительность всех корней функции $\wp'$. При $B' = e'_i$ $\delta_3^2 = 0$ и $\delta_4^2 = 1$. Рассматриваемый случай удобно получить из формул начала § 3 для $w - w'_0$, если справа сделать предельный переход при $B' \to e'_i$. Последовательно найдем:

$$w - w'_0 = \frac{R_1}{k_1}\int_0^{\rho_1} ds\,[h(\xi); k_1]\, d\xi \equiv M'_2 \int_{\rho_2}^{\rho_1} ds\,(\xi; k_1)\, d\xi.$$

Продолжая начатые преобразования, последовательно найдем:

$$w - w'_0 = M'_2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} d\varphi / \sin\varphi \equiv M'_2 \ln \operatorname{tg}\frac{\delta_2}{2} - M'_2 \ln \operatorname{tg}\frac{\delta_1}{2}$$

или

$$w - w_0''' = M'_2 \ln \operatorname{tg}\frac{\delta_2}{2} \equiv M'_2 \ln \operatorname{tg}\frac{\arcsin \operatorname{sn}(\nu_1; k_1)}{2} \equiv$$

$$\equiv \frac{M'_2}{2} \ln\{[1 - \operatorname{cn}(\nu_1; k_1)] / [1 + \operatorname{cn}(\nu_1; k_1)]\}.$$

Отсюда, потенцируя, получим после элементарного преобразования: $\operatorname{th}\mu = \operatorname{cn}(\nu_1; k_1) \equiv \operatorname{sn}(k'_1 K(k_1) + k'_1\nu_1;\ ik_1/k'_1)$. Обращая, найдем

$$[k_1 K(k_1) + k'_1 \nu_1]\, i = \int_0^{i\mu} [1 - (1/k_1'^2)\sin^2\xi]^{-1/2}\, d\xi.$$

4. Пусть $B' \neq e'_{i,j,k}$ и $\Delta(g') \neq 0$. Прежде всего отметим, что между A', B', g'_2 g'_3 (а также $e'_{i,j,k}$) формулы (3,4) работы [5] и k_1, k_2, M_1 и M_2, входящими в (3,1) или (3,2) существует следующая зависимость: $B' = L_1$, $A'^2 = L_2$, $e'_k = L_3$, $e'_i = L_4$, $e'_j = L_5$, $g'_2 = L_6$, $g'_3 = L_7$, $\Delta(g') \equiv 16(e'_i - e'_k)^2 (e'_k - e'_j)^2 (e'_j - e'_i)^2 = L_8$.

Отсюда легко составить сразу выражение абсолютного инварианта $J(\tau) \equiv g_2'^3 / \Delta(g') = L_9$, что дает уравнение для определения k_1^2 по g'_2 и g'_3. Найдя k_1^2, легко из написанных уравнений найти k_2^2, M_1 и M_2 и, наоборот, по k_1^2, k_2^2, M_1 и M_2 найти A', B', g'_2, g'_3 (а также $e'_{i,j,k}$). В предположении, что $\Delta(g') \neq 0$ и $B' \neq e'_{i,j,k}$, можно получить формулы, аналогично приведенным здесь, связывающие A'', B'', g''_2, g''_3 (а также $e''_{i,j,k}$) с M_1, M_2, k_1 и k_2, что позволит от (3,5) работы [5] переходить к (3,1) или (3,2) и наоборот.

5. Нам остается теперь показать, что при $\Delta(g') \neq 0$ и $B' \neq e'_{i,j,k}$ k_1, M_1 и k_2, M_2 в формулах (3,1) или (3,2) соответствуют либо первой неэлементарной нормальной форме [2], либо второй [3] (т. е., что k_1, k_2, M_1 и M_2 являются числами вида $k_1 = s_1$, $k_2 = s_2$, $M_1 = s_3$, $M_2 = s_4$ при

некоторых значениях $\tau_{1,2}$ и $N_{1,2}$ (см. конец § 1)). Так как k_1, k_2, M_1, M_2 из (3,1) при $\Delta(g')>0$ в силу формул § 1 являются действительными или чисто мнимыми, то оба уравнения (3,1) одновременно принадлежат к первой неэлементарной форме зависимостей первого класса и, следовательно, совместно (т. е. 2 шкалы для σ исключаются) номографируемы.

Пусть $\Delta(g')<0$. Полагаем $e_k'=-2a$, $e_i'=a+bi$, $e_j'=a-bi$. Производя вычисления, найдем (см. § 1) $k_1=s_1$, $k_2=s_2$, $M_1=s_3$, $M_2=s_4$, что и доказывает утверждение. Задавая k_1, k_2, M_1, M_2 вида соответственно s_1, s_2, s_3, s_4, найдем последовательно τ_1, N_1, a, b, e_i', e_j', e_k', τ_2, N_2, B' и A', удовлетворяющие требованиям § 1.

6. Вернемся к перечисленным в § 2 случаям вырождения $\wp$-функции.

1°. $B'=e'_{i,j,k}=0$. Полагая $\gamma=A'/2$, получим $w-w_0'=\gamma(z-z_0')^2$. Если $B'\neq e'_{i,j,k}=0$, то полагаем $P=B'^2/A'^2$, $Q=B'$, $w_{01}'=(Pw_0'-1)/P$, $z_{01}'=z_0$, где P и Q — произвольные действительные числа. Интегрируя получим параметрические и непараметрические уравнения искомой зависимости второго класса:

$$\sigma=P\,(w-w_{01}')^2+a_0,\quad \sigma=-Q\,(z-z_{01}')^2+1+a_0,\quad P\,(w-w_{01}')^2+Q\,(z-z_{01}')^2=1.$$

2°. $B'=e_j'=e_k=-e_i/2\neq 0$. Полагая $M=A'/3e_k'$, $\gamma=\sqrt{-3e_k'}$, где M и γ — произвольные числа с действительными квадратами и $w_{01}'=w_0'-M$, $z_{01}'=z_0'$, получим $w-w_{01}'=M\cos[\gamma(z-z_{01}')]$*. Если $B'=e_i'=-2e_k'=-2e_j'$, то $w-w_0'=M\ln\cos[\gamma(z-z_0')]$*, что доказывает номографируемость всех круговых и гиперболических синусов и косинусов. Если $B'\neq e'_{i,j,k}$, то, полагая $k^2=\frac{e_k'-B'}{3e_k}$, найдем:

$$k'^2=\frac{B'+2e_k'}{3e_k'},\quad \gamma=\sqrt{-3e_k'},\quad \frac{k}{M}=\frac{\sqrt{3e_k'(e_k'-B')}}{A'},$$
$$\operatorname{sh}\left[\frac{k}{M}(w-w_0')\right]=\frac{k}{k'}\cos\,[\gamma\,(z-z_0')],$$

причем в соответствии с 3° § 5 работы (3) k/M, k/k' и γ независимо один от двух других может иметь произвольные значения с действительными квадратами.

3°. $B'=e_i'=e_j'=-e_k'/2\neq 0$. Полагая $\gamma=\sqrt{3e_k'/2}$, $M=-2A'/3e_k'$, $z_{01}'=z_0'$, $w_{01}'=w_0'-M$, получим опять $w-w_{01}'=M\cos[\gamma(z-z_{01}')]$* (см. 2°). Если $B'=e_k'=-2e_i'=-2e_j'\neq 0$, получим опять:

$$w-w_0'=M\ln\cos[\gamma(z-z_0')]^*.$$

Если $B'\neq e'_{j,i,k}$ то, полагая $k^2=\frac{e_k'+2B'}{3e_k'}$, найдем

$$k'^2=\frac{2e_k'-2B'}{3e_k'},\quad \frac{k}{M}=-\frac{1}{2A'}\sqrt{3e_k'(e_k'+2B')}.$$

Получим опять: $\operatorname{sh}\left[\frac{k}{M}(w-w_0')\right]=\frac{k}{k'}\cos[\gamma(z-z_0')]$.

Поступило
17 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Вильнер, Номограммы аналитических функций комплексного переменного первого класса, Диссертация, МГУ, 1946. [2] И. А. Вильнер, ДАН, 53, № 3 (1946). [3] И. А. Вильнер, ДАН, 55, № 9 (1947). [4] Ю. С. Сикорский, Элементы теории эллиптических функций, 1936. [5] И. А. Вильнер, ДАН, 63, № 2 (1948). [6] И. А. Вильнер, Усп. мат. наук, 2, в. 6 (22) (1947). [7] И. А. Вильнер, ДАН, 58, № 5 (1947).

* Эти зависимости первого класса и второго жанра.