

В. В. ВЕДЕРНИКОВ

**ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДРЕНИРУЮЩЕГО
ИЛИ ВОДОНОСНОГО СЛОЯ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 15 X 1949)

1. В 1934 г. было начато решение задач по фильтрации с учетом влияния капиллярности грунта. В работах (1, 2) рассмотрена фильтрация из канала, ограниченного вертикальными стенками. Теоретические исследования и опыты позволили объяснить наблюдавшиеся факты и установить ряд положений о фильтрации при действии фактора капиллярности грунта. Затем (3) был дан учет влияния капиллярности грунта на фильтрацию из каналов трапециoidalного сечения, а в книге (4) были приведены результаты решения задачи (1, 2) о фильтрации при наличии дренирующего слоя, но без учета влияния капиллярности грунта. В (1, 6, 7) уже указано то изменение фильтрации при учете влияния капиллярности грунта, которое вносит наличие дренирующего слоя, именно, растекание фильтрационного потока над дренирующим слоем.

Здесь мы дадим решение достаточно общей задачи о фильтрации из канала (рис. 1, а, в, д, е) шириной b и с глубиной воды H с учетом как влияния капиллярности грунта, так и наличия на некоторой глубине T (от уровня воды в канале) дренирующего или водоносного слоя (когда пьезометрический уровень воды в слое сильно проницаемого грунта стоит на H_p выше границы между грунтом, в котором прорыт канал, и этим слоем).

Это же решение, при соответствующем подборе параметров, позволяет (рис. 1, б, г) рассчитать приток грунтовых вод в осушительный канал из водоносного слоя с напорными водами. При решении задачи пользуемся методом, разработанным ранее (8). На свободной поверхности, в соответствии с указанным ранее (1, 2), потенциал скорости $\varphi = k(y + h_v)$. Вдали от канала ($x \rightarrow \infty$) свободная поверхность горизонтальна и расположена на высоте $H_p + h_v$ над водоносным слоем. Вид области Жуковского θ меняется в зависимости от значений параметра α , отвечающего экстремумам (в точках, обозначенных на рис. 1 буквой r с индексами 1 и 2)* функций $\theta_1 = x - X$ или $\theta_2 = y - Y$ в области z . Соответствие точек ясно из рис. 1, а, в, д, е.

2. С помощью формулы Кристоффеля — Шварца находим приведенную функцию течения:

$$Z = X + iY = i \frac{\varphi + i\psi}{k} = D \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{\rho^2-\zeta^2}} + C_1 = \frac{D}{\rho} F(\varphi, \bar{k}_x) + C_1. \quad (1)$$

* В этих точках скорость фильтрации $v = k$.

Из соответствия точек имеем $C_1 = 0$. Затем при $\zeta = 1$ (точка f) получаем $Q_{es}/2 = DK_x/\rho$, откуда

$$D/\rho = Q_{es}/2K_x. \quad (2)$$

Полагая $\zeta = \rho$, находим

$$T - H_p = \frac{Q_{es} K_{x_1}}{2 K_x}. \quad (3)$$

Здесь K_x и K_{x_1} — полные эллиптические интегралы при модуле $\bar{k}_x = 1/\rho$ и дополнительном модуле $\bar{k}_{x_1} = \sqrt{1 - \bar{k}_x^2}$. Если обозначить $\varphi = \arcsin \zeta$, можем написать

$$Z = \frac{T - H_p}{K_{x_1}} F(\varphi, \bar{k}_x). \quad (4)$$

3. Связь между функцией Жуковского θ и комплексным переменным ζ определится по формуле Кристоффеля — Шварца в виде

$$\begin{aligned} \theta = \theta_1 + i\theta_2 &= P \int_0^{\zeta} \frac{(\alpha^2 - \zeta^2) d\zeta}{V1 - \zeta^2 V \beta^2 - \zeta^2 (\rho^2 - \zeta^2)} + C = \\ &= \frac{P}{\rho} \left[F(\varphi, \bar{k}) - \frac{\rho^2 - \alpha^2}{\rho^2} \Pi(n, \varphi, \bar{k}) \right] + C. \end{aligned} \quad (5)$$

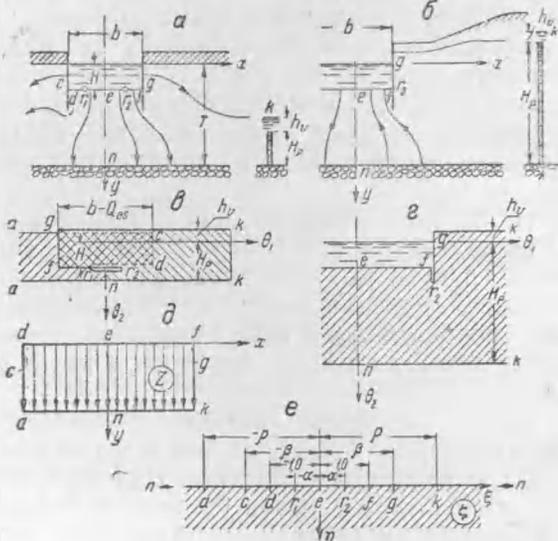


Рис. 1

Здесь первый интеграл — эллиптический интеграл первого рода при модуле $\bar{k} = 1/\beta$ и второй интеграл — эллиптический интеграл третьего рода при модуле $\bar{k} = 1/\beta$ и параметре $n = -1/\rho^2$. Вычисление вычета относительно полюса $\zeta = \rho$ дает

$$P = (H_p + h_v) \times \frac{V \rho^2 - 1 V \rho^2 - \beta^2 2\rho}{\pi (\rho^2 - \alpha^2)}. \quad (6)$$

Из соответствия точек находим $C = iH$. Обозначая эллиптический интеграл первого рода U , выражая эллиптический интеграл третьего рода че-

рез тэта-функции и учитывая, что (так как $\bar{k}^2 \operatorname{sn}^2 a = -n$) $\operatorname{sn} a = \beta/\rho$, будем иметь

$$\theta = SU - \frac{H_p + h_v}{\pi} \ln \frac{\vartheta_4 \left[\frac{\pi}{2K} (U - a) \right]}{\vartheta_4 \left[\frac{\pi}{2K} (U + a) \right]} + iH; \quad (7)$$

здесь обозначено

$$\frac{2(H_p + h_v)}{\pi} \left[\frac{\alpha^2 V \rho^2 - 1 V \rho^2 - \beta^2}{\beta \rho (\rho^2 - \alpha^2)} - \frac{\vartheta_4' \left(\frac{\pi}{2K} a \right)}{\vartheta_4 \left(\frac{\pi}{2K} a \right)} \right] = S. \quad (8)$$

4. Перейдем к определению параметров. При $\zeta = 1$ (точка f) находим

$$\frac{b - Q_{es}}{2} = SK. \quad (9)$$

Точке g при $\zeta = \beta$ отвечает

$$\frac{b - Q_{es}}{2} - ih_v = S(K + iK_1) - i(H_p + h_v) \frac{a}{K} + iH. \quad (10)$$

Отсюда, выделяя мнимую часть, получаем

$$H_v = H + h_v = (H_p + h_v) \frac{a}{K} - SK_1. \quad (11)$$

Исключая S из формул (9) и (11), получаем формулу приведенного расхода Q_{es} на единицу длины канала в виде:

$$Q_{es} = b + 2 \frac{K}{K_1} H_v - 2(H_p + h_v) \frac{a}{K_1} = b + NH_v - M(H_p + h_v). \quad (12)$$

Сопоставляя формулы (3) и (12), получаем первое уравнение для определения одного из параметров β или ρ :

$$(T - H_p) 2 \frac{K_x}{K_{x_1}} = b + 2 \frac{K}{K_1} H_v - 2 \frac{a}{K_1} (H_p + h_v). \quad (13)$$

Сопоставляя значения S по (8) и (11), получаем формулу для определения α .

Уравнения для определения второго параметра, β или ρ , получим, рассматривая условия, отвечающие концевым точкам стенок (шпунтов), ограждающих канал (рис. 1, a или b), в которых $v_s = \infty$, или $1/v_s = 0$. Определим $1/v_s$:

$$\frac{1}{v_s} = \frac{k dz}{d(\varphi + i\psi)} = i \frac{d\theta}{dz} + i = i \frac{P}{D} \frac{\alpha^2 - \zeta^2}{\sqrt{\rho^2 - \zeta^2} \sqrt{\beta^2 - \zeta^2}} + i. \quad (14)$$

Используя условия на концах шпунтов, которым отвечает $\xi = \xi_{us}$, получаем уравнение

$$\frac{\xi_{us}^2 - \alpha^2}{\sqrt{\rho^2 - \xi_{us}^2} \sqrt{\beta^2 - \xi_{us}^2}} = \frac{T - H_p}{K_{x_1} \rho} \frac{\pi(\rho^2 - \alpha^2)}{(H_p + h_v) \sqrt{\rho^2 - 1} \sqrt{\rho^2 - \beta^2} 2\rho}. \quad (15)$$

Концам шпунтов отвечает $\varphi_{us} = \arcsin \xi_{us}$ и $U_{us} = F(\varphi_{us}, \bar{k})$,

$$\theta_{2us} = H + d - Y_{us} = S U_{us} - \frac{H_p + h_v}{\pi} \ln \frac{\vartheta_4 \left[\frac{\pi}{2K} (U_{us} - a) \right]}{\vartheta_4 \left[\frac{\pi}{2K} (U_{us} + a) \right]} + H, \quad (16)$$

$$Y_{us} = \frac{T - H_p}{K_{x_1}} [K_{x_1} - F(\varphi'_{us}, \bar{k}_{x_1})], \quad (17)$$

где $\varphi'_{us} = \arcsin(\sqrt{1 - \xi_{us}^2} / \bar{k}_{x_1})$.

Глубине забивки шпунта $d = 0$ отвечает $\xi_{us} = 1$, и вместо системы уравнений (15) — (17) остается уравнение (15), которое переписываем в виде

$$\frac{H_p + h_v}{T - H_p} = \frac{\pi}{2K_{x_1}} \frac{(\rho^2 - \alpha^2) \sqrt{\beta^2 - 1}}{(1 - \alpha^2) \sqrt{\rho^2 - \beta^2}}. \quad (18)$$

5. Зная k , b , H , h_v , d , H_p и T , расход на фильтрацию из канала (или приток грунтовых вод к каналу или котловану) Q на длине канала L найдем, определив с помощью уравнений (13) и (15) — (17) значения параметров β и ρ . Заметим, что $z = Z + \theta^*$.

Данное здесь решение позволяет оценивать влияние наличия на некоторой глубине под дном канала дренирующего или водоносного слоя на фильтрацию из канала или в канал с земляными откосами путем введения в формулы расхода (³, ⁵) поправочных коэффициентов, исчисляемых на основе результатов решения этой задачи.

Произведенное построение вспомогательных графиков показывает, что на значительном участке кривых зависимостей

$$A = N - M \frac{H_p + h_v}{H_v} = f\left(\frac{b}{H_v}, \frac{T - H_p}{H_v}, \frac{H_p + h_v}{H_v}\right)$$

возможно использовать вырождение эллиптических функций при $\bar{k}_x \rightarrow \bar{k} \rightarrow 1$. При $d = 0$ получаем формулу

$$Q_{es} = b \frac{T - H_p}{T - H} + \left[2,93 \frac{(T - H_p)(H - H_p)}{T - H} \log m + 2,93 \frac{(T - H_p)(H_p + h_v)}{T - H} \log(m + \sqrt{m^2 - 1}) \right], \quad (19)$$

где

$$m = \frac{\bar{k}_{x_1}}{\bar{k}_1} = \frac{(T - H_p)(H - H_p) - (H_p + h_v)\sqrt{(T - H_p)^2 - (H - 2H_p - h_v)H_v}}{H_v(H - 2H_p - h_v)}. \quad (20)$$

Последний член в правой части формулы (19) учитывает увеличение фильтрационного расхода по сравнению с фильтрацией в вертикальной трубе за счет бокового растекания и капиллярности грунта. Очевидно, что при $d > 0$ чем больше d , тем меньше влияние на расход растекания и капиллярности грунта.

Всесоюзный заочный
энергетический институт

Поступило
12 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Ведерников, Гидротехническое строительство, № 5 (1935). ² Его же, ДАН, 3, № 4 (1936). ³ Его же, ДАН, 28, № 5 (1940). ⁴ Его же, Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа, 1939. ⁵ Его же, Научн. зап. Московск. ин-та инж. водн. хоз., 4 (1937). ⁶ Его же, ДАН, 55, № 3 (1947), ⁷ Его же, Изв. АН СССР, ОТН, № 8 (1947). ⁸ Его же, Фильтрация из каналов, 1934.

* При наличии осадков ($q_s > 0$) или испарения ($q_s < 0$) интенсивностью q_s на единицу площади горизонтальной проекции свободной поверхности в правой части формулы (1) следует прибавить член $q_s z$.