Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. СМИРНОВ

О СИСТЕМАХ ПОКРЫТИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 X 1949)

1. Под покрытием в этой заметке всегда понимается конечное открытое покрытие; покрытие β вписано в покрытие α, если каждый элемент покрытия β содержится хотя бы в одном элементе покрытия α. Множество Σ покрытий пространства R называется определяющей системой для этого пространства, если во всякое покрытие пространства R вписано некоторое покрытие, являющееся элементом Σ. Естественно ставится вопрос о наименьшем кардинальном числе, являющемся мощностью некоторой определяющей системы покрытий; это число мы называем комбинаторным весом данного пространства R и обозначаем его через $\sigma(R)$ (аргумент R будем часто опускать); вес пространства R (т. е. наименьшую мощность базы пространства R) обозначаем через $\tau(R)$ или просто через τ.

Теорема 1. *Для того чтобы регулярное пространство (состоящее из бесконечного числа точек) было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счетный комбинаторный вес.*

Эта теорема содержится в совокупности следующих утверждений:

1) Для всякого пространства $\tau \leqslant \sigma \leqslant 2^{\tau}$.

2) Для бикомпактов $\sigma = \tau$.

3) Если A замкнуто в R, то $\sigma(A) \leqslant \sigma(R)$.

4) Если R состоит из множества мощности τ изолированных точек, то $\sigma = 2^{\tau}$.

Утверждение 4 вытекает из следующего предложения:

Теорема 2. *Число всех открыто-замкнутых* (т. е. одновременно открытых и замкнутых) *множеств пространства R не превосходит числа $\sigma(R)$.*

Доказательство. Каждому открыто-замкнутому множеству H пространства R соответствует покрытие $\eta = \{H, R \setminus H\}$. Если в это покрытие вписано какое-нибудь покрытие $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$, то H есть сумма некоторых O_i. Итак, число покрытий вида $\eta = \{H, R \setminus H\}$, в которые вписано данное покрытие ω, конечно. Если покрытия ω_α образуют определяющую систему, то в каждое покрытие вида $\eta = \{H, R \setminus H\}$ вписано некоторое покрытие $\omega_\alpha \in \Sigma$, поэтому мощность множества всех покрытий вида $\eta = \{H, R \setminus H\}$, а следовательно, и мощность множества всех открыто-замкнутых множеств пространства R не превосходит мощности системы Σ, что и требовалось доказать.

Следствие. *Мощность множества всех открыто-замкнутых множеств данного бикомпакта не превосходит веса этого бикомпакта.*

Из предложений 1—4 получаем следующее добавление к теореме 1:

Теорема 1'. *Все метризуемые некомпактные пространства со счетной базой имеют комбинаторный вес, равный мощности континуума.*

Теорема 1''. *Пусть τ — бесконечное кардинальное число, не являющееся суммой счетного числа меньших кардинальных чисел* (и, значит, несчетное). *Всякое метризуемое пространство R веса τ имеет комбинаторный вес 2^τ.*

2. Во всем последующем предполагаем, что R есть нормальное пространство. Через αR обозначаем максимальное бикомпактное (так называемое чеховское) расширение пространства R (см. ([1]) или ([2]), стр. 18) Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3. *Комбинаторный вес всякого нормального пространства равен весу его максимального бикомпактного расширения.*

Доказательство основывается на вспомогательных предложениях, некоторые из которых представляют, быть может, самостоятельный интерес.

Пусть U — открытое множество пространства R. Обозначим через $O(U)$ наибольшее открытое в αR множество O, удовлетворяющее условию $O \cap R = U$. Как известно ([1,2]), точки пространства αR суть всевозможные максимальные центрированные и регулярные системы $\xi = \{U_\alpha\}$ открытых множеств U_α пространства R. Базу пространства αR составляют все множества вида O_U, каждое из которых состоит из всех систем $\xi \in \alpha R$, содержащих в качестве элемента фиксированное открытое множество U пространства R.

Лемма 1. *Для любого открытого $U \subseteq R \subseteq \alpha R$ имеем $O(U) = O_U$.*

Лемма 2. *Для любого открытого в R множества U имеем $\alpha R[R \setminus U] = \alpha R \setminus O(U)$* (здесь квадратные скобки обозначают замыкание в том пространстве, которое указано перед скобками).

Отсюда выводятся:

Теорема 4. *Пусть в нормальном пространстве R даны замкнутое множество A и его окрестность U; тогда $\alpha R[A] \subseteq O(U)$, причем αR является единственным бикомпактным расширением пространства R, обладающим этим свойством для любых замкнутого $A \subseteq R$ и его окрестности U.*

Теорема 5. *Если $\omega = \{U_1, \ldots, U_s\}$ есть покрытие нормального пространства R, то $O\omega = \{O(U_1), \ldots, O(U_s)\}$ есть покрытие пространства αR, причем αR является единственным бикомпактным расширением пространства R, обладающим этим свойством для любого покрытия ω.*

Первое утверждение этой теоремы (опирающееся лишь на первое утверждение теоремы 4) и является основой доказательства теоремы 3. Для проведения этого последнего нам, в силу утверждения 2 § 1, достаточно показать, что $\sigma(\alpha R) = \sigma(R)$. Неравенство $\sigma(\alpha R) \leqslant \sigma(R)$ вытекает из того, что для любой определяющей системы $\Sigma = \{\omega_\nu\}$, $\omega_\nu = \{U_{\nu i}\}$ пространства R покрытия $O\omega_\nu = \{O(U_{\nu i})\}$ образуют определяющую систему для αR.

В самом деле, пусть $\omega^* = \{O_1^*, \ldots, O_s^*\}$ — произвольное покрытие пространства αR. Существуют канонические открытые множества (([1]), стр. 26) $H_j^* \subseteq O_j^*$ такие, что $\eta^* = \{H_1^*, \ldots, H_s^*\}$ есть покрытие пространства αR. Множества $H_j = R \cap H_j^*$ суть канонические открытые множества в R, причем $O(H_j) = H_j^*$. К покрытию $\eta = \{H_1, \ldots, H_s\}$ подбираем вписанное в него $\omega_\nu = \{U_{\nu i}\}$; тогда $O\omega_\nu$ вписано в $O\eta = \eta^*$, значит, тем более, в ω^*. Неравенство $\sigma(\alpha R) \leqslant \sigma(R)$ этим доказано.

Для доказательства обратного неравенства берем определяющую систему $\Sigma^* = \{\omega_\nu^*\}$, $\omega_\nu^* = \{U_{\nu i}^*\}$, пространства αR и доказываем, что $\Sigma = \{\omega_\nu\}$, $\omega_\nu = \{R \cap U_{\nu i}^*\}$, есть определяющая система для R.

В самом деле, возьмем произвольное покрытие $\omega = \{U_1, \ldots, U_s\}$ пространства R. По теореме 5 система $O\omega = \{O(U_1), \ldots, O(U_s)\}$ является покрытием αR. Берем ω_ν^*, вписанное в $O\omega$. Тогда ω_ν вписано в ω, что и требовалось доказать.

Из теоремы 3 следуют:

Теорема 6. *Если нормальное пространство R' является непрерывным образом нормального пространства R, то $\sigma(R') \leqslant \sigma(R)$.*

Теорема 7. *Для любого нормального расширения R^* нормального пространства R имеем $\sigma(R^*) \leqslant \sigma(R)$.*

3. П. С. Александров доказал, что оператор O_U (т. е. наш оператор $O(U)$) осуществляет взаимно-однозначное отображение системы всех канонических открытых множеств пространства R на систему всех канонических открытых множеств пространства αR, причем это отображение является изоморфизмом в смысле равенства $O_{U \cap V} = O_U \cap O_V$. Можно легко показать, что этот результат сохраняет силу, если заменить αR любым расширением R^* пространства R: это вытекает из того, что существует лишь одно каноническое открытое множество в R^*, дающее при пересечении с R данное каноническое U, и этим единственным множеством является $O(U)$. Изоморфизм, обратный изоморфизму $O(U)$, есть просто $R \cap O(U) = U$. Аналогично оператор $R^*[A]$ (замыкание в R^*) осуществляет взаимно-однозначное отображение системы всех канонических замкнутых множеств пространства R на систему всех канонических замкнутых множеств R^*.

Теорема 8. *Система всех открыто-замкнутых множеств пространства R взаимно-однозначно и изоморфно отображается на систему всех открыто-замкнутых множеств пространства αR посредством оператора $O(U)$* (или тождественного с ним в данном случае оператора $\alpha R[U]$), *причем обратным оператором является оператор пересечения с R.*

Теорема 9. *Пусть R — нульмерное нормальное пространство. Среди всех бикомпактных расширений пространства R одно лишь максимальное расширение αR обладает тем свойством, что множество всех открыто-замкнутых в R множеств взаимно-однозначно отображается посредством оператора $O(U)$* (или тождественного с ним в данном случае оператора замыкания $\alpha R[U]$) *на множество всех открыто-замкнутых множеств расширения αR.*

Простые примеры показывают, что предположение нульмерности пространства R здесь является существенным.

Поступило
21 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Матем. сборн., 5, 403 (1939). [2] П. Александров, Усп. матем. наук, 2, 5 (1947).