Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ПРОХОРОВ

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 X 1949)

1. Настоящая заметка посвящена исследованию условий приложимости усиленного закона больших чисел (у. з. б. ч.) к последовательности независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

Сначала дается необходимое и достаточное условие у. з. б. ч. в терминах, содержащих вероятности неравенств для некоторых сумм случайных величин (теорема 1), а затем, как следствие теоремы 1, получаются: необходимое и достаточное условие у. з. б. ч. в терминах дисперсии $D\xi_n$ для случая, когда либо все ξ_n распределены по закону Гаусса, либо

$$|\xi_n| = o\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right), \tag{2}$$

а также достаточное условие А. Н. Колмогорова ([1]) и его обобщение, данное Brunk'ом ([3]).

2. Определение 1. Случайные величины η_n последовательности

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$$

усиленно устойчивы, если существует такая последовательность чисел

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots,$$

что *

$$P\{\eta_n - d_n \to 0\} = 1. \tag{3}$$

Замечание. Если выполнено (3), то

$$P\{\eta_n - m\eta_n \to 0\} = 1.$$

Определение 2. Последовательность (1) удовлетворяет у. з. б. ч., если средние арифметические

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \tag{4}$$

усиленно устойчивы.

---

* Принятые обозначения: $P\{\ \}$ — вероятность события, указанного в скобках $M\xi$ — математическое ожидание, $D\xi$ — дисперсия, $m\xi$ — медиана случайной величины ξ.

Определение 3. Последовательности ξ_n и ξ'_n назовем эквивалентными, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n \neq \xi'_n\} < \infty.$$

Известно, что эквивалентные последовательности удовлетворяют у. з. б. ч. одновременно.

3. Приводимая ниже лемма 1, которая была сообщена мне А. Н. Колмогоровым, представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные величины и*

$$\zeta_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда

$$P\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\zeta_k - m\zeta_k| > h\right\} \leqslant 4P\left\{|\zeta_n - m\zeta_n| > \frac{h}{2}\right\}.$$

Лемма 2. *Для усиленной устойчивости независимых случайных величин* $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r, \ldots$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{|\eta_r - m\eta_r| > \varepsilon\} < \infty.$$

4. Введем обозначения

$$\chi_0 = \xi_1 + \xi_2, \qquad \chi_r = \frac{1}{2^r}(\xi_{2^r+1} + \xi_{2^r+2} + \cdots + \xi_{2^{r+1}}) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* (1) *удовлетворяла у. з. б. ч., необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{|\chi_r - m\chi_r| > \varepsilon\} < \infty. \tag{6}$$

Теорема 1 вытекает из леммы 2 и теоремы 2.

Теорема 2. *Для усиленной устойчивости* η_n *необходима и достаточна усиленная устойчивость* χ_r.

Наметим вкратце доказательство теоремы 2.

Необходимость. Из тождества $\chi_r = 2\eta_{2^{r+1}} - \eta_{2^r}$ заключаем, что если $\eta_n - d_n \to 0$, то $\chi_r - 2d_{2^{r+1}} + d_{2^r} \to 0$.

Достаточность. Заметим сперва, что из $a_n / 2^n \to 0$ вытекает

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{2^n} \to 0.$$

Положим теперь

$$\chi_r^n = \frac{\xi_{2^r+1} + \xi_{2^r+2} + \cdots + \xi_n}{2^r}, \quad k(n) = \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right],$$

$$d_n = \frac{m\chi_0 + 2m\chi_1 + \cdots + 2^{k(n)-1}\, m\chi_{k(n)-1} + 2^{k(n)}\, m\chi^n_{k(n)}}{n}.$$

Легко видеть, что

$$|\eta_n - d_n| \leqslant \frac{|\chi_0 - m\chi_0| + 2|\chi_1 - m\chi_1| + \cdots + 2^{k(n)-1}|\chi_{k(n)-1} - m\chi_{k(n)-1}|}{2^{k(n)}} + $$
$$+ |\chi^n_{k(n)} - m\chi^n_{k(n)}|. \tag{7}$$

Если $\chi_r - m\chi_r \to 0$, то из лемм 1 и 2 вытекает, что

$$\max_{2^r < n \leqslant 2^{r+1}} |\chi_r^n - m\chi_r^n| \to 0$$

и, в силу (7), $\eta_n - d_n \to 0$.

5. Когда все ξ_n распределены по закону Гаусса, вероятности $P\{|\chi_r - m\chi_r| > \varepsilon\}$ легко оценить.

В результате получится

Теорема 3. *Для того чтобы распределенные по закону Гаусса ξ_n удовлетворяли у. з. б. ч., необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-\varepsilon/H_r} < \infty, \quad где\ H_r = D\chi_r. \tag{8}$$

Применяя для оценки вероятностей $P\{|\chi_r - m\chi_r| > \varepsilon\}$ неравенства, полученные А. Н. Колмогоровым ([2]), можно доказать, что имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы ξ_n, подчиненные требованию* (2), *удовлетворяли у. з. б. ч., необходимо и достаточно условие* (8).

Как следствие из теоремы 4 получается теорема 5, слегка обобщающая упомянутую в п. 1 теорему Brunk'а:

Теорема 5. *Пусть $q \geqslant 1$. Положим*

$$b^{(q)}(\xi_n) = \int |x - M\xi_n|^q \, dP_{\xi_n}.$$

Для того чтобы последовательность (1) *удовлетворяла у. з. б. ч., достаточно условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{(2q)}(\xi_n)}{n^{q+1}} < \infty. \tag{9}$$

При $q = 1$ (9) превращается в достаточное условие А. Н. Колмогорова:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty.$$

6. Известно, что для у. з. б. ч. необходимо условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - m\xi_n| > n\} < \infty.$$

Иначе говоря, последовательности $\xi_n - m\xi_n$ и ξ_n', где

$$\xi_n' = \begin{cases} \xi_n - m\xi_n & \text{при } |\xi_n - m\xi_n| \leqslant n, \\ 0 & \text{при } |\xi_n - m\xi_n| > n, \end{cases}$$

в случае применимости у. з. б. ч. всегда эквивалентны. Таким образом, при изучении условий приложимости у. з. б. ч. возможно ограничиться случаем последовательностей, подчиненных требованию

$$|\xi_n| \leqslant n. \tag{10}$$

Этот результат нельзя улучшить в том смысле, что, какова бы ни была функция $\varphi(n) = o(n)$, найдется удовлетворяющая у. з. б. ч. последовательность (1), для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - m\xi_n| > \varphi(n)\} = \infty.$$

Теорема 6. *Для того чтобы* ξ_n, *подчиненные требованию* (10), *удовлетворяли у. з. б. ч., необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{|\chi_r - M\chi_r| > \varepsilon\} < \infty. \tag{11}$$

Если (11) выполнено, то в (3) можно положить

$$d_n = M\eta_n.$$

Теорема 7. *Для того чтобы* ξ_n, *подчиненные требованию* (10), *удовлетворяли у. з. б. ч., необходимо, чтобы*

$$H_r \to 0. \tag{12}$$

Для любой последовательности чисел $H_r \to 0$ *существует удовлетворяющая у. з. б. ч. последовательность* (1), *для которой* $D\chi_r = H_r$ *и выполнено условие* (10).

Теорема 8. *Условие*

$$\sum_{r=0}^{\infty} H_r < \infty \tag{13}$$

достаточно для у. з. б. ч. Для любой последовательности чисел H_r *с*

$$H_r \to 0, \quad \sum_{r=0}^{\infty} H_r = \infty$$

существует последовательность (1), *не удовлетворяющая у. з. б. ч., для которой* $D\chi_r = H_r$ *и соблюдено условие* (10).

Теорема 8 является видоизменением одной теоремы А. Н. Колмогорова. Теоремы 7 и 8 показывают, что среди условий, которые можно сформулировать в терминах дисперсий H_r, для последовательностей, подчиненных требованию (10), условие (12) является самым узким необходимым, а условие (13) — самым широким достаточным.

В заключение горячо благодарю А. Н. Колмогорова, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 13 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М. — Л., 1936, стр. 76. [2] А. Н. Колмогоров, Math. Ann., **101**, 126 (1929). [3] H. D. Brunk, Duke Math. Journ., **1**, 181 (1948).