Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. Л. КУЧЕР

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 X 1949)

1. Мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений, которую в векторно-операторных обозначениях можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ и $f(t)$ — вектор-функции n-мерного пространства E_n, каким-либо образом нормированного; $A(t)$ — линейная оператор-функция, определенная и непрерывная при $t \geqslant 0$ *. Перрон [1], используя найденное им преобразование системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2}$$

к виду, в котором матрица $A(t)$ имеет треугольную форму, получил необходимое и достаточное условие того, чтобы при любой ограниченной непрерывной вектор-функции $f(t)$ все решения системы (1) были ограничены. И. Г. Малкин [2] обнаружил, что эти условия эквивалентны наличию у системы (2) следующего свойства: существуют такие $N > 0$, $\nu > 0$, что всякое решение системы (2) удовлетворяет условию

$$\| x(t) \| \leqslant N \exp[-\nu(t - t_0)] \, \| x(t_0) \| \qquad (0 \leqslant t_0 < t < \infty). \tag{3}$$

Следуя М. Г. Крейну [3], условимся говорить, что уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \Phi(x, t) \tag{4}$$

обладает свойством $L(\nu, N)$ $(N > 0,\ \nu \gtreqless 0)$, если всякое его решение $x = x(t)$ удовлетворяет условию (3), каковы бы ни были значения t_0, t $(t_0 < t)$, принадлежащие интервалу существования этого решения.

М. Г. Крейн указал метод непосредственного доказательства теоремы Малкина, который позволил ее несколько усилить и перенести на случай уравнений в банаховских пространствах. В его формулировке теорема звучит следующим образом:

Теорема А. *Для того чтобы любой ограниченной непрерывной вектор-функции $f(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ отвечало ограниченное решение задачи Коши*

* Достаточно считать $A(t)$ измеримой и существенно ограниченной в любом конечном интервале.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x(0) = 0, \tag{5}$$

необходимо, чтобы при некоторых N, $\nu > 0$ всякое решение уравнения (2) *удовлетворяло условию*

$$\| x(t) \| \leqslant N \exp(-\nu t) \| x(0) \| \quad (0 \leqslant t < \infty),$$

а если $A(t)$ — ограниченная оператор-функция ($\| A(t) \| < a$, $0 \leqslant t < \infty$), *то необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *обладало свойством $L(\nu, N)$ при некоторых N, $\nu > 0$.*

Пользуясь методом М. Г. Крейна, докажем теорему 1.

Теорема 1. *Для того чтобы любой вектор-функции $f(t)$, суммируемой в p-й степени* ($p > 1$, $\int\limits_0^\infty \| f(t) \|^p dt < \infty$), *отвечало ограниченное решение задачи Коши* (5), *необходимо, чтобы при некоторых $N > 0, \nu > 0$ всякое решение уравнения* (2) *удовлетворяло условию*

$$\| x(t) \| \leqslant N \exp(-\nu t^{1/q}) \| x(0) \| \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad 0 \leqslant t < \infty\right);$$

а если $A(t)$ — ограниченная оператор-функция, то необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2) *обладало свойством $L(\nu, N)$ при некоторых N, $\nu > 0$.*

Необходимость. Решение задачи Коши (5) можно записать в виде

$$x(t) = \int\limits_0^t U(t) U^{-1}(\tau) f(\tau) \, d\tau,$$

где $U(t)$ — оператор-функция, являющаяся решением системы:

$$\frac{dU}{dt} = A(t) U, \quad U(0) = I.$$

Введем в рассмотрение новое пространство G, элементами которого являются суммируемые в p-й степени вектор-функции $f(t)$, значения которых принадлежат E_n.

Норму в G определяем равенством $\| f \| = \sqrt[p]{\int\limits_0^\infty \| f(t) \|^p dt}$. G — полное линейное нормированное пространство. Так как, по условию, при любом $f(t) \in G$ $\sup \| x(t) \| < \infty$, то, по известной теореме функционального анализа ([4]), существует такое $M > 0$, что

$$\| x(t) \| \leqslant M \| f \| \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{6}$$

Пусть y — произвольный элемент из E_n, а $\chi(t) = \| U(t) \|$. Зафиксируем $t > 0$ и образуем вектор-функцию

$$f(\tau) = \frac{U(\tau) y}{\chi(\tau)} g(\tau), \qquad \text{где } g(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ 0, & t < \tau < \infty. \end{cases}$$

Соответствующее решение задачи Коши (5) при $\tau = t$ принимает значение

$$x(t) = \varphi(t) U(t) y, \quad \text{где } \varphi(t) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\chi(\tau)}.$$

Согласно (6) $\varphi(t) \| U(t) y \| \leqslant Mt^{1/p} \| y \|$. Вследствие произвольности y отсюда получаем: $\varphi(t)\chi(t) \leqslant Mt^{1/p}$, откуда $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geqslant \frac{1}{M} t^{-1/p}$.

Значит, $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)\exp\left[\frac{q}{M}(t^{1/q}-1)\right]$ $(1 \leqslant t < \infty)$.

Таким образом, $\chi(t) \leqslant N_1 t^{1/p} \exp\left(-\frac{q}{M} t^{1/q}\right)$ $(1 \leqslant t < \infty)$, где $N_1 = \frac{M}{\varphi(1)} \exp\left(\frac{q}{M}\right)$.

Для $\nu = \frac{q}{M} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, найдется такое $T > 1$, что

$$\chi(t) \leqslant N_1 \exp(-\nu t^{1/q}) \quad (T < t < \infty).$$

Если обозначить $N_0 = \max\{N_1, \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \chi(t) \exp(\nu t^{1/q})\}$, то

$$\| U(t) \| \leqslant N_0 \exp(-\nu t^{1/q}) \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{7}$$

откуда и следует первая часть теоремы.

Из (7) видно, что из ограниченности решений задачи Коши вытекает ограниченность любого решения неоднородного уравнения (1).

Если в (5) вместо $x(0) = 0$ принять $x(t_0) = 0$ $(t_0 \geqslant 0)$ и рассматривать интервал $(t_0 \leqslant t < \infty)$, то при ограниченной оператор-функции $A(t)$ найдется такое N, не зависящее от t_0, что

$$\| U(t) U^{-1}(t_0) \| \leqslant N \exp\left[-\nu (t - t_0)^{1/q}\right] \quad (0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty). \tag{8}$$

Из (3) легко следует, что любой ограниченной вектор-функции отвечает ограниченное решение задачи Коши, а отсюда, на основании сформулированной выше теоремы Крейна — Малкина, заключаем, что уравнение (2) обладает свойством $L(\nu, N)$ при некоторых N, $\nu > 0$. Необходимость доказана.

Достаточность очевидна.

Ясно, что теорема A соответствует случаю $p = \infty$.

Для случая $p = 1$ рассуждения значительно упрощаются, и вместо условия (8) получается условие $\| U(t) U^{-1}(t_0) \| \leqslant N$ $(0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty)$. Этот факт недавно был указан Белмэном.

2. М. Г. Крейну [3] принадлежит следующая теорема:

Теорема C. *Если уравнение первого приближения* (2) *обладает свойством* $L(\nu_0, N_0)$ *и* $\| \Phi(x, t) \| \leqslant q \| x \|$ $(\| x \| < \rho, t \geqslant 0)$, *то полное уравнение* (4) *будет обладать свойством* $L(\nu, N_0)$, *где* $\nu = \nu_0 - N_0 q$

Применением аналогичных рассуждений получается

Теорема 2. *Если уравнение первого приближения* (2) *обладает свойством* $L(\nu_0, N_0)$, *а*

$$\| \Phi(x, t) \| \leqslant f(t) \| x \| \ (f(t) \geqslant 0, t \geqslant 0;\ \| x \| < \rho), \text{ где } \int_0^\infty f^p(t) dt = k^p < \infty \ (p > 1),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *полное уравнение* (4) *будет обладать свойством* $L(\nu, N)$, *где* $\nu = \nu_0 - \varepsilon$.

Доказательство. Для любого решения уравнения (4) имеем:

$$x(t) = U(t) U^{-1}(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t) U^{-1}(\tau) \Phi[x(\tau), \tau] d\tau \quad (0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty).$$

После замены $t=t_0+s$, $\tau=t_0+\sigma$, при обозначении $\| x(t) \| = \| x(t_0+s) \| = \varphi(s)$ получаем:

$$\varphi(s) \leqslant N_0 \exp(-\nu_0 s)\varphi(0) + N_0 \int_0^s \exp[-\nu_0(s-\sigma)] f(t_0+\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Отсюда нетрудно заключить, что $\varphi(s) \leqslant \psi(s)$ $(s \geqslant 0)$, где

$$\psi(s) = N_0 \exp(-\nu_0 s)\varphi(0) + N_0 \int_0^s \exp[-\nu_0(s-\sigma)] f(t_0+\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma$$

и, следовательно,

$$\varphi(s) \leqslant N_0 \varphi(0) \exp[-\nu_0 s + N_0 \int_0^s f(t_0+\sigma)\,d\sigma]. \tag{9}$$

Так как $\int_0^s f(t_0+\sigma)\,d\sigma \leqslant k s^{1/q} < \frac{\varepsilon}{N_0} s$ при достаточно больших s $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, то теперь уже легко закончить доказательство теоремы.

Замечание. Если $p=1$, то из (9) следует, что $\nu=\nu_0$.

Легко таким же образом получить:

Теорема 3. *Если каждое решение уравнения первого приближения* (2) *удовлетворяет условию* $\| x(t) \| \leqslant N_0 \| x(\tau) \|$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty)$, *а*

$$\| \Phi(x,t) \| \leqslant f(t) \| x \| \quad (f(t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0;\ \| x \| < \rho), \quad \text{где} \int_0^\infty f(t)dt = k < \infty,$$

то и любое решение полного уравнения (4) *будет обладать этим свойством при некотором* N, *например, при* $N = N_0 \exp(N_0 k)$.

В статье ([5]) Белмэн приводит обобщение теоремы Перрона об ограниченности всех решений уравнения (4) при условии ограниченности всех решений уравнения (1) для всякой $f(t)$, принадлежащей одному из функциональных пространств M, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ в интервале $(0, \infty)$.

Сравнение результатов Белмэна с теоремой М. Г. Крейна и теоремами 2, 3 показывает, что условия теорем Белмэна содержат излишние требования, а утверждения могут быть значительно усилены.

Неполнота результатов Белмэна объясняется тем, что от него остался скрытым тот факт, что необходимое и достаточное условие ограниченности всех решений уравнения (1) при любых $f(t)$, принадлежащих M или $L^{(p)}$ $(p>1)$, выражается в каждом из этих случаев одним и тем же — наличием у уравнения (2) свойства $L(\nu, N)$ при некоторых N, $\nu > 0$.

Приношу благодарность проф. М. Г. Крейну за предоставление возможности ознакомиться с рукописью его работы, краткое извлечение из которой помещено в ([3]).

Одесский институт инженеров морского флота

Поступило
1 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Math. Zs., 34, H. 3 (1930); 32, H. 5 (1930). [2] И. Г. Малкин, Сборн. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, № 3 (1935); № 7 (1937). [3] М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, 3, в. 3 (25) (1948). [4] С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Радянська школа, 1948, ст. 68. [5] R. Bellman, Ann. of Math., 49, No. 3, July (1948).