ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2018, том 81, № 1, с. 40–50

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

СПЕКТР МАСС И ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ МЕЗОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

В. В. Кондратюк*, Ю. Д. Черниченко**

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Международный центр перспективных исследований, Гомель, Беларусь

Поступила в редакцию 14.08.2017 г.

Получены новые релятивистские квазиклассические условия квантования и лептонные ширины распадов в квантовой хромодинамике для несингулярных запирающих квазипотенциалов и квазипотенциалов воронкообразного типа (приближение инстантонного взаимодействия). Рассмотрение проведено в рамках полностью ковариантного квазипотенциального подхода в квантовой теории поля, сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс.

DOI: 10.7868/S0044002718010166

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания спектра масс мезонов в основном и довольно успешно использовалось нерелятивистское уравнение Шредингера с линейным потенциалом

$$V_{\text{lin}}(r) = \sigma r, \quad \sigma > 0. \tag{1}$$

Однако нерелятивистская модель оказалась непригодной при описании спектра масс и лептонных ширин распадов существенно релятивистских систем, поскольку вклад релятивистских поправок для высших радиальных возбуждений становится большим ($v^2/c^2 \approx 0.4$), а для легких векторных ρ-, ω-мезонов он даже сравним с вкладом нерелятивистского гамильтониана, выбираемого в качестве основного [1–3].

В двухчастичном приближении квадрат модуля функции Бете–Солпитера двух заряженных частиц $\chi_{\text{BS}}(x)$ при $x = (\tau, \mathbf{r}) = 0$, а следовательно, при относительном времени $\tau = 0$, появляется в выражениях для лептонных ширин $\Gamma_0(e^+e^-)$ для 1^--состояний ($\ell = 0$) [4] (см. также работы [3, 5–7]):

$$\Gamma_{n,0}(e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 e_q^2 \frac{|\chi_{\text{BS}}(x=0)|^2}{M^2}\bigg|_{\ell=0}, \tag{2}$$

где α — постоянная тонкой структуры; e_q — заряд кварка в единицах электрического заряда e; M — полная энергия связанного состояния двух бесспиновых частиц (кварков) в с.ц.и. с массами m_1 и m_2 и относительным 3-импульсом $\mathbf{p}'$, т.е. $q\bar{q}$ (или e^+e^-)-системы.

Представление квадрата модуля функции Бете–Солпитера в нуле, $|\chi_{\text{BS}}(0)|^2$, через квадрат модуля нерелятивистской волновой функции в нуле в состоянии с $\ell = 0$, $|\psi_0^{\text{нр}}(0)|^2$, которая отвечает нерелятивистскому уравнению Шредингера для случая двух частиц равных масс с несингулярным в нуле потенциалом запирания $V_{\text{conf}}(r)$, ведет в ВКБ-приближении к формуле [8, 9] (здесь $\hbar = c = 1$)

$$|\psi_0^{\text{нр}}(0)|^2 = \frac{m_q^2}{4\pi^2} v_n^{\text{нр}} \frac{dE_n}{dn}, \tag{3}$$

где $v_n^{\text{нр}} = \sqrt{E_n/m_q}$ — нерелятивистская скорость свободного кварка с массой m_q и кинетической энергией $E_n/2$ для данного уровня n, причем для простоты $V_{\text{conf}}(0) = 0$.

Обобщение нерелятивистского выражения (3) путем добавления к несингулярному потенциалу запирания $V_{\text{conf}}(r)$ кулоновского взаимодействия

$$V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{\alpha_s}{r}, \tag{4}$$

где α_s — сильная константа связи, было выполнено в работах [10, 11]. Их результат дается формулой

$$|\psi_0^{\text{нр}}(0)|^2 = \frac{m_q^2}{4\pi^2} F(v_n^{\text{нр}}) v_n^{\text{нр}} \frac{dE_n}{dn}, \tag{5}$$

где

$$F(v) = \frac{\pi\alpha_s}{v}\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi\alpha_s}{v}\right)\right]^{-1} \tag{6}$$

— нерелятивистский кулоновский S-фактор.

*E-mail: valeria_kondratjuk@tut.by
**E-mail: chyud@mail.ru;chern@gstu.by

Отметим, что формула (5) справедлива как при $E_n > 0$, так и при $E_n < 0$, причем при $E_n \to \to 0 (v_n^{\text{пг}} \to 0)$ выражение в (5) непрерывно переходит в равенство

$$|\psi_0^{\text{пг}}(0)|^2 = \frac{\alpha_s m_q^2}{4\pi}\frac{dE_n}{dn}, \quad E_n < 0.$$

Релятивистская модификация формулы (3) также для случая двух частиц равных масс была проведена в работах [12, 13]. Для этого авторы использовали возможность представления функции Бете–Солпитера в нуле, соответствующей полному ядру взаимодействия Бете–Солпитера, через приближение инстантонного взаимодействия (приближение Солпитера), т.е. заменой функции $\chi_{\text{BS}}(0, \mathbf{r})$ s-волновой функцией Солпитера $\Psi_0^{\text{rel}}(r)$ ($\ell = 0$) для инстантонного $q\bar{q}$-взаимодействия. Их результат дается выражением ($\hbar = c = 1, V_{\text{conf}}(0) = 0$)[1)]

$$|\Psi_0^{\text{rel}}(0)|^2 = \frac{M_n^2}{16\pi^2} v_n \frac{dM_n}{dn}, \tag{7}$$

где

$$v_n = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{M_n^2}} \tag{8}$$

– релятивистская скорость свободного кварка с массой m_q, а $M_n = 2m_q + E_n$.

Релятивистский аналог нерелятивистского выражения (5) был получен в работе [4]. Развитый в [4] подход базируется на решении релятивистским ВКБ-методом модифицированного уравнения Бете–Солпитера, не зависящего от относительного времени τ. Это означает выполнение следующих предположений (аппроксимация инстантонным взаимодействием): фоковское $q\bar{q}$-состояние дает доминирующий вклад в функцию Бете–Солпитера в области $r > m_q^{-1}$; $q\bar{q}$-взаимодействие адекватно описывается инстантонным кулоновским взаимодействием (4); возможные (дальнего порядка) спин-зависимые эффекты игнорируются. При этих предположениях доминирующий вклад в функцию Бете–Солпитера для s-состояния при $\tau = 0$ в области $r \gg m_q^{-1}$ дает решение инстантонного уравнения Солпитера для $q\bar{q}$-системы: $\chi_{\text{BS}}(0, \mathbf{r})|_{\ell=0} = = \Psi_0^{\text{rel}}(r)$. В этом случае релятивистский аналог формулы (5) дается выражением

$$|\Psi_0^{\text{rel}}(0)|^2 = \frac{M_n^2}{16\pi^2} F(v_n) v_n \frac{dM_n}{dn}, \quad M_n > 2m_q, \tag{9}$$

где кулоновский S-фактор по-прежнему определяется формулой (6). При $M_n < 2m_q$ выражение (9) принимает вид

$$|\Psi_0^{\text{rel}}(0)|^2 = \frac{\alpha_s M_n^2}{16\pi}\frac{dM_n}{dn},$$

а при отсутствии кулоновского взаимодействия ($\alpha_s = 0$) оно переходит в (7).

Иной подход для нахождения спектра масс и лептонных ширин распадов мезонов основан на применении релятивистского квазипотенциального (РКП) подхода Логунова–Тавхелидзе в квантовой теории поля [15]. В настоящей работе используется тот вариант РКП-подхода к задаче о двух релятивистских частицах, который был предложен в работах [16, 17]. Этот подход не связан с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Фейнмана–Дайсона, а использует гамильтонову формулировку квантовой теории поля [18]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях.

Возможность релятивистской модификации формул для лептонных ширин в рамках РКП-подхода основана на том, что функция Бете–Солпитера при $x = 0$ для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс m_1 и m_2 может быть выражена через волновые РКП-функции в пространстве моментов $\Psi_{q'}(\mathbf{k}')$ и в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении $\psi_{q'}(\mathbf{r})$ соотношением[2)]

$$\chi_{\text{BS}}(x = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{k}'} \Psi_{q'}(\mathbf{k}') = \lim_{r \to i\lambda'} \psi_{q'}(\mathbf{r}), \tag{10}$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}'} = m'c^2 d\mathbf{k}'/E_{k'}$ — релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, которое реализуется на верхней поле́ массового гиперболоида

$$E_{k'}^2 - c^2\mathbf{k}'^2 = m'^2 c^4, \tag{11}$$

$E_{k'} = c\sqrt{m'^2c^2 + \mathbf{k}'^2}$ — энергия эффективной релятивистской частицы с массой $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ и относительным 3-импульсом $\mathbf{k}'$, выступающей в качестве системы двух релятивистских частиц произвольных масс, и связана с их полной энергией M в с.ц.и. соотношением [20, 21]

$$\sqrt{s} = M = c\sqrt{m_1^2c^2 + \mathbf{k}^2} + \tag{12}$$

[1)]Существование такого соотношения для релятивистского случая ранее было предложено, но не доказано, в работе [14].

[2)]Напомним, что модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}, |\mathbf{n}| = = 1$) и 3-импульс $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы являются релятивистскими инвариантами [19].

$$+c\sqrt{m_2^2c^2+\mathbf{k}^2}=\frac{m'}{\mu}E_{k'},$$

а $\lambda'=\hbar/m'c$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы.

Релятивистская модификация формулы (2) для лептонной ширины распада мезона с полной энергией $M_n<2mc^2$ и в состоянии с $\ell=0$ на лептон-антилептонную пару в рамках РКП-подхода [16] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс посредством квазипотенциала $V(r)=-\alpha_s/r+\sigma r^s$, $\sigma,s>0$ была выполнена в работе [22]. РКП-уравнение с таким квазипотенциалом было решено релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода, что дает

$$\Gamma_{n,0}(\mu\to e^+e^-)=\frac{16\pi\alpha^2e_q^2}{M_n^2}\left|\psi_{q'_n}(0)\right|^2\Big|_{\ell=0}= \tag{13}$$
$$=\alpha^2e_q^2\frac{m\kappa_s}{\pi\hbar^3M_n^2}\frac{dM_n}{dn}\times$$
$$\times\left|F\left(1-\frac{\kappa_s}{2\sin\kappa_n},1;2;1-e^{-2i\kappa_n}\right)\right|^2,$$

где $\kappa_s=\alpha_s/\hbar c$, $\kappa_n=\arccos(M_n/2mc^2)$, а $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция.

Отметим еще работы [23], в которых в рамках РКП-подхода [16] были найдены выражения для квазиклассических условий квантования и ширин лептонных распадов векторных и псевдоскалярных мезонов. Также обратим внимание и на работу [24], в которой были вычислены слабые константы распада псевдоскалярных и векторных мезонов, волновые функции которых удовлетворяют РКП-уравнению, предложенному в [25], с полным релятивистским потенциалом взаимодействия кварка, т.е. учитывающим все спин-зависимые и спин-независимые релятивистские вклады.

Цель настоящей работы состоит в получении релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода [22] релятивистских формул для условий квантования и лептонных ширин распадов векторных мезонов с полной энергией M_n и относительным орбитальным моментом ℓ на лептон-антилептонную пару. Рассмотрены случаи, когда взаимодействие двух релятивистских кварков произвольных масс, образующих векторные мезоны, является либо несингулярным чисто запирающим, либо содержит кулоновское взаимодействие (приближение инстантонного взаимодействия). Это будет означать выполнение следующих предположений: $q\bar{q}$-состояние дает доминирующий вклад в волновую функцию; $q\bar{q}$-взаимодействие адекватно описывается инстантонным кулоновским взаимодействием (4); возможные (дальнего порядка) спин-зависимые эффекты игнорируются. Учет же вкладов от спиновых эффектов планируется рассмотреть в последующих исследованиях. В разд. 2 представлен формализм РКП-подхода в квантовой теории поля, сформулированного в релятивистском $\mathbf{r}$-представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс [20]. Получены решения уравнения для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r,\chi)$ и определены условия применимости релятивистского ВКБ-метода. В разд. 3 и 4 получены условия квантования и новые выражения для лептонных ширин распадов векторных мезонов в релятивистском квазиклассическом приближении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс посредством несингулярных запирающих квазипотенциалов и квазипотенциалов воронкообразного типа в приближении инстантонного взаимодействия. В разд. 4 также выполнен анализ поведения полученных выражений для лептонных ширин распадов векторных мезонов в нерелятивистском и релятивистском случаях, в случае равных масс частиц и сравнение новых выражений с их нерелятивистскими и релятивистскими аналогами. Результаты исследований обсуждаются в Заключении.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РКП-УРАВНЕНИЯ

В основу нашего рассмотрения положено полностью ковариантное РКП-уравнение в $\mathbf{r}$-представлении в конечно-разностной форме, построенное в [20] для волновой РКП-функции $\psi_{q'}(\mathbf{r})$ для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2. Для сферически-симметричных потенциалов это уравнение имеет вид

$$\left(2E_{q'}-\widehat{H}_0\right)\psi_{q'}(\mathbf{r})=\frac{2\mu}{m'}V(r)\psi_{q'}(\mathbf{r}), \tag{14}$$

где $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$ — обычная приведенная масса двух релятивистских частиц произвольных масс, оператор

$$\widehat{H}_0=2m'c^2\left[\operatorname{ch}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial r}\right)+\right. \tag{15}$$
$$\left.+\frac{i\lambda'}{r}\operatorname{sh}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\lambda'^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]$$

— оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, в котором $\Delta_{\theta,\varphi}$ — его угловая часть, энергия $E_{q'}$ определена в (11), а квазипотенциал $V(r)$ является локальным в $\mathbf{r}$-представлении в смысле геометрии Лобачевского, реализующейся на верхней полé массового гиперболоида (11), и для простоты считается не зависящим от энергии $E_{q'}$.

Используя разложение волновой РКП-функции $\psi_{q'}(\mathbf{r})$ по функциям Лежандра,

$$\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}\frac{\varphi_\ell(r,\chi)}{r}P_\ell\left(\frac{\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}}{q'r}\right), \quad (16)$$

вместо (14) получим уравнение для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r,\chi)$:

$$\left[\operatorname{ch}\left(i\lambda'\frac{d}{dr}\right) + \frac{\lambda'^2\ell(\ell+1)}{2r(r+i\lambda')}\times\right. \quad (17)$$
$$\left.\times\exp\left(i\lambda'\frac{d}{dr}\right) - X(r)\right]\varphi_\ell(r,\chi) = 0.$$

Здесь

$$X(r) = \frac{\mu}{m'^2c^2}\,(M - V(r)), \quad (18)$$

а χ — быстрота, которая параметризирует импульс $\mathbf{q}'$ и полную энергию в (12):

$$\mathbf{q}' = m'c\operatorname{sh}\chi\mathbf{n}_{q'}, \quad |\mathbf{n}_{q'}| = 1,$$
$$M = \frac{m'^2c^2}{\mu}\operatorname{ch}\chi, \quad E_{q'} = m'c^2\operatorname{ch}\chi.$$

В релятивистском квазиклассическом приближении (ВКБ-приближение) решение уравнения (17) ищется в виде [22]

$$\varphi_\ell(r,\chi) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}g(r)\right], \quad (19)$$

$$g(r) = g_0(r) + \frac{\hbar}{i}g_1(r) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 g_2(r) + \ldots$$

Учет первых двух членов разложения (19) позволяет получить ВКБ-решения с левой r_L и правой r_R точками поворота в области $r_L \le r \le r_R$:

$$\varphi_\ell^{L,R}(r,\chi) = \quad (20)$$
$$= \frac{C_{L,R}}{2\sqrt[4]{X^2(r) - R^2(r)}}\left\{\exp\left[i\alpha_+^{L,R}(r) \mp \frac{i\pi}{4}\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[i\alpha_-^{L,R}(r) \pm \frac{i\pi}{4}\right]\right\},$$

где

$$\alpha_\pm^{L,R} = \frac{1}{\lambda'}\int\limits_{r_{L,R}}^{r} dr'\chi_\pm(r'), \quad (21)$$

$$\chi_\pm(r) = \ln\left[X(r) \pm \sqrt{X^2(r) - R^2(r)}\right],$$

$$R(r) = \sqrt{1 + \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r^2}}, \quad \Lambda = \ell + 1/2,$$

$C_{L,R}$ — нормировочные константы, а левая r_L и правая r_R точки поворота определяются как точки ветвления корня в (20):

$$X(r_{L,R}) = R(r_{L,R}). \quad (22)$$

Условие применимости релятивистского ВКБ-метода определяется неравенством

$$\lambda'\left|\frac{\operatorname{ch}\chi_{\text{eff}}(r)}{\chi_+(r)\operatorname{sh}\chi_{\text{eff}}(r)}\frac{d\chi_+(r)}{dr}\right| \ll 1, \quad (23)$$

где

$$\chi_{\text{eff}}(r) = \operatorname{arch}X_{\text{eff}}(r) =$$
$$= \ln\left(X_{\text{eff}}(r) + \sqrt{X_{\text{eff}}^2(r) - 1}\right),$$
$$X_{\text{eff}}(r) = \operatorname{ch}\chi_{\text{eff}}(r) = \frac{X(r)}{R(r)}.$$

В случае $\ell = 0$ условие (23) преобразуется в неравенство

$$\lambda'\left|\frac{\operatorname{ch}\chi(r)}{\chi(r)\operatorname{sh}\chi(r)}\frac{d\chi(r)}{dr}\right| \ll 1, \quad (24)$$

где величина

$$\chi(r) = \operatorname{arch}X(r) = \ln\left[X(r) + \sqrt{X^2(r) - 1}\right]$$

имеет смысл быстроты эффективной релятивистской частицы массы m', движущейся в поле потенциала $V(r)$, в терминах которой измеряется расстояние между двумя точками импульсного пространства Лобачевского, реализуемого на гиперболоиде (11).

В нерелятивистском пределе при $\chi \to 0$ и $M = m'^2c^2/\mu + E$ неравенство (24) переходит в обычное условие $|d\lambda'_{\text{пr}}(r)/dr| \ll 1, \lambda'_{\text{пr}}(r) = \hbar/p_{\text{пr}}(r)$, где $p_{\text{пr}}(r) = \sqrt{2\mu[E - V(r)]}$ — нерелятивистский импульс эффективной частицы с приведенной массой μ, движущейся в поле потенциала $V(r)$. В ультрарелятивистском пределе при $\chi \to \infty$ неравенство (24) принимает вид

$$\lambda'\left|\frac{d}{dr}\ln\left|\ln\frac{\lambda'(r)}{\lambda'}\right|\right| \ll 1, \quad \lambda'(r) = \frac{\lambda'}{\operatorname{sh}\chi(r)},$$

которое при $m_1 = m_2 = m$ совпадает с аналогичным условием, полученным в [22].

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ МОДИФИЦИРОВАННОЕ УСЛОВИЕ КВАНТОВАНИЯ

Условие квантования, как и в нерелятивистском случае, находим из условия совпадения волновых функций в (20) в точке $r \in (r_L; r_R)$. Для этого необходимо выбрать

$$C_L = C_\ell\exp\left[-\frac{i}{2\lambda'}\int\limits_{r_L}^{r} dr'\ln R^2(r')\right],$$

$$C_R = C_\ell(-1)^n\exp\left[-\frac{i}{2\lambda'}\int\limits_{r_R}^{r} dr'\ln R^2(r')\right],$$

где C_ℓ — произвольная постоянная, что ведет к ВКБ-условию квантования

$$\int_{r_L}^{r_R} dr\,[\chi_+(r) - \ln R(r)] = \pi\lambda'\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (25)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

3.1. Случай несингулярного конфайнментного потенциала

Для несингулярного чисто запирающего (конфайнментного) потенциала $V(r) = V_{\text{conf}}(r)$ ($V_{\text{conf}}(0) = 0$) интеграл в (25) может быть преобразован к более простому виду путем вынесения зависимости от центробежного члена в $\chi_+(r)$ за знак интеграла. Это может быть достигнуто разбиением на две части области интегрирования в (25) точкой R, лежащей в классически допустимой области движения и такой, что значение R можно считать большим по сравнению с r_L (см. рис. 1). В области I, где $r \in (r_L; R)$, должен доминировать вклад от центробежного члена $\lambda'^2\Lambda^2/r^2$, а потенциал учитывается как возмущение. В области II, где $r \in (R; r_R)$, основной вклад будет давать потенциал $V_{\text{conf}}(r)$, а вклад от центробежного члена учитывается как возмущение. При этом точка поворота r_L определяется в основном центробежным членом

$$r_L \approx r_- = \frac{\lambda'\Lambda}{\operatorname{sh}\chi}, \quad \chi = \operatorname{arch}\left(\frac{\mu M}{m'^2c^2}\right), \quad (26)$$

а точка поворота $r_R \approx r_+$ — потенциалом $V_{\text{conf}}(r)$, т.е., как и в случае $\ell = 0$, условием

$$X(r_+) = 1. \quad (27)$$

Тогда условие квантования (25) представим в виде

$$\int_{r_L}^{r_R} dr\chi_+(r) = I_1 + I_2 = \pi\lambda'\left(n + \frac{1}{2}\right) + I_3, \quad (28)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0,$$

где

$$I_1 = \int_{r_L}^{R} dr\chi_+(r), \quad I_2 = \int_{R}^{r_R} dr\chi_+(r),$$
$$I_3 = \int_{r_L}^{r_R} dr \ln R(r).$$

Интеграл в I_3 легко вычисляется интегрированием по частям, а учитывая (26) и что $r_R \gg \lambda'\Lambda$, находим

$$I_3 \approx \frac{\pi\lambda'\Lambda}{2} - \frac{\lambda'\Lambda\ln(\operatorname{ch}\chi)}{\operatorname{sh}\chi} - \lambda'\Lambda\arcsin\frac{1}{\operatorname{ch}\chi}. \quad (29)$$

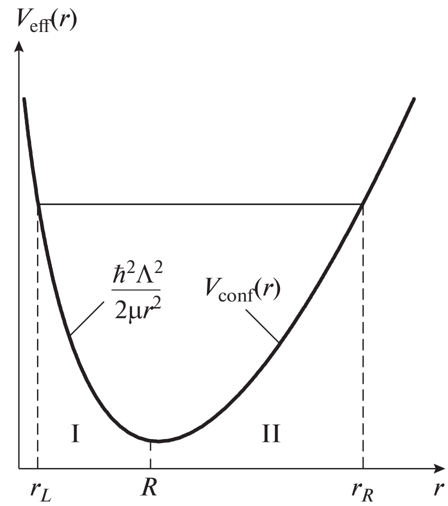

Рис. 1. Вид эффективного потенциала $V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{conf}}(r) + \hbar^2\Lambda^2/(2\mu r^2)$ в уравнении (17).

Интеграл в I_1 также вычисляется интегрированием по частям при условии малости потенциала в области I, а поскольку $r_- \ll R$, то его выражение упрощается к виду

$$I_1 \approx R\chi + \frac{\lambda'^2\Lambda^2 e^{-\chi}}{2R\operatorname{sh}\chi} - \frac{\lambda'\Lambda\ln(\operatorname{ch}\chi)}{\operatorname{sh}\chi} - \lambda'\Lambda\arcsin\frac{1}{\operatorname{ch}\chi}. \quad (30)$$

Интеграл в I_2, где $R \ll r_+$, после разложения подынтегральной функции по степеням $-\lambda'^2\Lambda^2/r^2$, позволяет представить его в виде

$$I_2 \approx \int_0^{r_+} dr\chi(r) - R\chi - \frac{\lambda'^2\Lambda^2 e^{-\chi}}{2R\operatorname{sh}\chi}. \quad (31)$$

Подставляя в (28) выражения (29)–(31), приходим к ВКБ-условию квантования в случае несингулярного конфайнментного потенциала:

$$\int_0^{r_+} dr\chi(r) = \pi\lambda'\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right), \quad (32)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0,$$

которое при $m_1 = m_2 = m$ совпадает с выражением, полученным в [22].

В качестве примера применения формулы (32) приведем условие квантования для потенциалов вида $V_{\text{conf}}(r) = \sigma r^s$, $s > 0$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{m'^2c^2}{\mu\sigma}\right)^{1/s}\Gamma\left(1 + \frac{1}{s}\right) \times \quad (33)$$
$$\times (\operatorname{sh}\chi)^{1/2+1/s} P_{-1/2}^{-1/2-1/s}(\operatorname{ch}\chi) =$$

$$= \pi\lambda' \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

В частности, для линейного потенциала (1) выражение (33) принимает простой вид

$$\chi \operatorname{ch} \chi - \operatorname{sh} \chi = \pi\tilde{\sigma} \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right),$$
$$\tilde{\sigma} = \frac{\hbar\mu\sigma}{m'^3 c^3}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

3.2. Случай сингулярного конфайнментного потенциала

Теперь рассмотрим случай, когда к несингулярному потенциалу запирания $V_{\rm conf}(r)$ добавляется кулоновское взаимодействие (4):

$$V(r) = V_{\rm conf}(r) - \frac{\alpha_s}{r}, \tag{34}$$

т.е. мы считаем, что внутри адрона взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена безмассовым скалярным глюоном, пропагатору которого в РКП-подходе в $\mathbf{r}$-представлении отвечает потенциал (4). В импульсном пространстве потенциал (4) обладает КХД-подобным поведением, которое впервые было отмечено в работе [26].

В рассматриваемом здесь случае необходимо в условии квантования (25) вынести за знак интеграла зависимости в $\chi_+(r)$ от центробежного и кулоновского членов. Теперь в области I, где $r \in \in (r_L; R)$, доминирует вклад от центробежного и кулоновского членов $\hbar^2\Lambda^2/2\mu r^2 - \alpha_s/r$, а потенциал учитывается как возмущение; в области II, где $r \in (R; r_R)$, основной вклад будет давать потенциал $V_{\rm conf}(r)$, а вклад от центробежного и кулоновского членов учитывается как возмущение. При этом точка поворота r_L теперь определяется в основном суммой центробежного и кулоновского членов:

$$r_L \approx r_- = \lambda' \frac{\sqrt{4\Lambda^2 \operatorname{sh}^2 \chi + \tilde{\alpha}_s^2} - \tilde{\alpha}_s \operatorname{ch} \chi}{2 \operatorname{sh}^2 \chi}, \tag{35}$$
$$\tilde{\alpha}_s = \frac{2\mu\alpha_s}{\hbar m' c},$$

а точка поворота $r_R \approx r_+$ — условием (27). Тогда выражение (25) запишется в виде

$$\int\limits_{r_L}^{r_R} dr \ln \left[X(r) + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2r} + \right. \tag{36}$$
$$\left. + \sqrt{\left(X(r) + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2r}\right)^2 - 1 - \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r^2}}\right] = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 =$$
$$= \pi\lambda' \left(n + \frac{1}{2}\right) + I_3, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0,$$

где

$$\tilde{I}_1 = \int\limits_{r_L}^{R} dr \ln \left[X(r) + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2r} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(X(r) + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2r}\right)^2 - 1 - \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r^2}}\right],$$
$$\tilde{I}_2 = \int\limits_{R}^{r_R} dr \ln \left[X(r) + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2r} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(X(r) + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2r}\right)^2 - 1 - \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r^2}}\right].$$

В принятых приближениях $r_- \ll R \ll r_+$, где теперь r_- определяется выражением (35), для интегралов в $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ и I_3 получаем:

$$\tilde{I}_1 \approx R\chi + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2 \operatorname{sh} \chi} \ln(2eR/\lambda') - \tag{37}$$
$$- \frac{r_-}{2} \ln \left(1 + \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r_-^2}\right) -$$
$$- \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2 \operatorname{sh} \chi} \ln \left(\frac{\sqrt{4\Lambda^2 \operatorname{sh}^2 \chi + \tilde{\alpha}_s^2}}{2 \operatorname{sh}^2 \chi}\right) +$$
$$+ \frac{\lambda'^2 (4\Lambda^2 e^{-\chi} \operatorname{sh}^2 \chi + \tilde{\alpha}_s^2 \operatorname{ch} \chi)}{8R \operatorname{sh}^3 \chi} -$$
$$- \lambda'\Lambda \arcsin \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \chi} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_s e^{-\chi}}{2\Lambda \operatorname{ch} \chi}\right)\right],$$

$$\tilde{I}_2 \approx \int\limits_0^{r_+} dr \chi(r) - R\chi + \frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2 \operatorname{sh} \chi} \ln(r_+/R) + \tag{38}$$
$$+ \frac{\lambda'^2 (4\Lambda^2 e^{-\chi} \operatorname{sh}^2 \chi + \tilde{\alpha}_s^2 \operatorname{ch} \chi)}{8 \operatorname{sh}^3 \chi} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{R}\right),$$

$$I_3 \approx \frac{\pi\lambda'\Lambda}{2} - \frac{r_-}{2} \ln \left(1 + \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r_-^2}\right) - \tag{39}$$
$$- \lambda'\Lambda \arcsin \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \chi} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_s \operatorname{sh} \chi}{2\Lambda \operatorname{ch} \chi}\right)\right].$$

Наконец, подставляя в (36) выражения (37)–(39), приходим к ВКБ-условию квантования в случае взаимодействия (34):

$$\int\limits_0^{r_+} dr \chi(r) = \pi\lambda' \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right) - \tag{40}$$

$$-\frac{\lambda'\tilde{\alpha}_s}{2\,\mathrm{sh}\,\chi}\ln\left(\frac{4r_+\,\mathrm{sh}^2\chi}{\lambda'\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}}\right),$$
$$n=0,1,\ldots,\quad \ell\geq 0.$$

В частности, для линейного потенциала (1) формула (40) дает

$$\chi\,\mathrm{ch}\,\chi-\mathrm{sh}\,\chi=\pi\tilde{\sigma}\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right)-$$
$$-\frac{\tilde{\sigma}\tilde{\alpha}_s}{2\,\mathrm{sh}\,\chi}\ln\left(\frac{4\,\mathrm{sh}^2\chi(\mathrm{ch}\,\chi-1)}{\tilde{\sigma}\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}}\right),$$
$$n=0,1,\ldots,\quad \ell\geq 0.$$

Заметим, что при больших значениях r фаза релятивистской кулоновской функции в ВКБ-приближении $\delta_\ell^{\mathrm{Coul,ВКБ}}(\chi)$ дается выражением

$$\delta_\ell^{\mathrm{Coul,ВКБ}}(\chi)= \tag{41}$$
$$=\frac{\tilde{\alpha}_s}{2\,\mathrm{sh}\,\chi}\ln\left(\frac{4er\,\mathrm{sh}^2\chi}{\lambda'\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}}\right)+$$
$$+2\Lambda\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}}{2\Lambda}\right)-$$
$$-2\Lambda\mathrm{arctg}\left(\frac{e^\chi\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}+\tilde{\alpha}_s}{2\Lambda\,\mathrm{sh}\,\chi}\right)+$$
$$+\Lambda\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}-\tilde{\alpha}_s\,\mathrm{ch}\,\chi}{2\Lambda\,\mathrm{sh}^2\chi}\right),$$

которое при $\tilde{\alpha}_s\ll 2\Lambda\,\mathrm{sh}\,\chi$ упрощается к виду

$$\delta_\ell^{\mathrm{Coul,ВКБ}}(\chi)\approx \tag{42}$$
$$\approx\frac{\tilde{\alpha}_s}{2\,\mathrm{sh}\,\chi}\ln\left(\frac{4r\,\mathrm{sh}^2\chi}{\lambda'\sqrt{4\Lambda^2\,\mathrm{sh}^2\chi+\tilde{\alpha}_s^2}}\right).$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части выражения (40) представляет собой фазу релятивистской кулоновской функции в ВКБ-приближении, вычисленную в точке поворота r_+ при $\tilde{\alpha}_s\ll 2\Lambda\,\mathrm{sh}\,\chi$. Тогда, принимая во внимание соотношения (41) и (42), выражение (40) запишется в виде

$$\int\limits_0^{r_+}dr\chi(r)=\pi\lambda'\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right)- \tag{43}$$
$$-\lambda'\delta_\ell^{\mathrm{Coul,ВКБ}}(\chi),\quad n=0,1,\ldots,\quad \ell\geq 0.$$

4. ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ В РКП-ПОДХОДЕ

В РКП-подходе релятивистскую лептонную ширину распада векторного мезона в состоянии с энергией M_n и относительным орбитальным моментом ℓ в соответствии с формулой Ван Роена—Вайскопфа [6] и согласно соотношениям (2), (10) и (16) определим выражением

$$\Gamma_{n,\ell}(e^+e^-)=\frac{16\pi\alpha^2e_q^2}{M_n^2}\times \tag{44}$$
$$\times\lim_{r\to i\lambda'}\left|\frac{(\Delta^*)^\ell}{\ell!}\left(\frac{\varphi_\ell^L(r,\chi_n)}{r}\right)\right|^2,$$

где $\Delta^*=[\exp(i\lambda'd/dr)-1]/i\lambda'$ — оператор конечно-разностного дифференцирования.

Подчеркнем, что формула (44) справедлива (как это имело место в работе [4]) в приближении инстантонного взаимодействия, которое здесь и рассматривается.

Рассмотрим общий случай, когда взаимодействие двух релятивистских кварков произвольных масс осуществляется посредством сингулярного потенциала запирания (34), причем $V_{\mathrm{conf}}(0)=0$. В поле такого потенциала уровни энергии $M_n=(m'^2c^2/\mu)\,\mathrm{ch}\,\chi_n$ для данного уровня n могут быть определены из условия квантования (40). ВКБ-решение (20) с потенциалом (34) и с данным фиксированным значением энергии M_n в области $r\in(r_L;r_R)$ можно представить в виде

$$\varphi_\ell^L(r,\chi)=\frac{C_\ell}{\sqrt[4]{X^2(r)-R^2(r)}}\times \tag{45}$$
$$\times\sin\left[\frac{1}{\lambda'}\int\limits_{r_L}^{r}dr'\ln\left(X(r')+\sqrt{X^2(r')-R^2(r')}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\lambda'}\int\limits_{r_L}^{r}dr'\ln\left(1+\frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r'^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right],$$

где значение быстроты χ_n соответствует значению энергии M_n для данного уровня n, а нормировочный множитель C_ℓ находится из условия нормировки

$$\int d\mathbf{r}\left|\frac{\varphi_\ell^L(r,\chi_n)}{r}\right|^2= \tag{46}$$
$$=4\pi\int\limits_0^\infty dr\left|\varphi_\ell^L(r,\chi_n)\right|^2=1,\ \ell\geq 0.$$

Заметим, что в области применимости ВКБ-приближения аргумент синуса в выражении (45) является быстро осциллирующей функцией. Поэтому квадрат синуса в (46) можно заменить, как и в нерелятивистском случае, его средним значением, равным $1/2$. Тогда вместо (46) имеем условие

$$2\pi|C_\ell|^2\int\limits_{r_L}^{r_R}\frac{dr}{\sqrt{X^2(r)-R^2(r)}}=1. \qquad (47)$$

Дифференцируя по полной энергии M_n условие квантования (25) при $\ell\geq 0$, где потенциал $V_{\rm conf}(r)$ не зависит от энергии M_n, и принимая во внимание определения (18), (21) и условие (22) для точек поворота $r_{L,R}$, получим

$$\int\limits_{r_L}^{r_R}\frac{dr}{\sqrt{X^2(r)-R^2(r)}}=\frac{\pi\lambda' m'^2c^2}{\mu}\frac{dn}{dM_n}. \qquad (48)$$

Из выражений (47) и (48) находим

$$|C_\ell|^2=\frac{\mu}{2\pi^2\lambda' m'^2c^2}\frac{dM_n}{dn}. \qquad (49)$$

ВКБ-волновая функция (45) полного потенциала (34) в области достаточно больших $\rho=r/\lambda'$, $r\in\in(r_L;r_R)$ (см. рис. 1), но таких, где все же в потенциале (34) преобладает кулоновское взаимодействие (4) (область в окрестности точки $r=R$), может быть аппроксимирована волновой функцией кулоновского потенциала[3)], для которого ее точный вид известен [21, 27–30]:

$$\varphi_\ell^{\rm Coul}(r,\chi_n)=C_\ell^{\rm Coul}\,(-\rho)^{(\ell+1)}\times$$
$$\times\exp\left[i\rho\chi_n+\frac{i\tilde\alpha_s\chi_n}{2\,{\rm sh}\,\chi_n}+i\pi(\ell+1)\right]\times$$
$$\times F\left(\ell+1-\frac{i\tilde\alpha_s}{2\,{\rm sh}\,\chi_n},\ell+1-i\rho;\; 2\ell+2;\;1-e^{-2\chi_n}\right), \qquad (50)$$

где $(-\rho)^{(l)}=i^l\Gamma(l+i\rho)/\Gamma(i\rho)$ — обобщенная степень [19], а $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Сравнивая асимптотическое выражение для кулоновской функции в (50),

$$\varphi_\ell^{\rm Coul}(r,\chi_n)\big|_{\rho\gg1}\sim$$
$$\sim\frac{2C_\ell^{\rm Coul}\Gamma(2\ell+2)e^{(\ell+1)\chi_n}|F_\ell^{\rm Coul}(\chi_n)|}{\Gamma(\ell+1)\,(2\,{\rm sh}\,\chi_n)^{\ell+1}}\times$$
$$\times\sin\left[\rho\chi_n-\frac{\pi\ell}{2}+\delta_\ell^{\rm Coul}(\chi_n)\right],$$

где

$$\delta_\ell^{\rm Coul}(\chi)=\frac{\tilde\alpha_s}{2\,{\rm sh}\,\chi}\ln\left(2\rho\,{\rm sh}\,\chi\right)+$$
$$+\arg\Gamma\left(\ell+1-\frac{i\tilde\alpha_s}{2\,{\rm sh}\,\chi}\right),$$

$$F_\ell^{\rm Coul}(\chi)=\frac{\Gamma(\ell+1)\exp\left(-\dfrac{\pi\tilde\alpha_s}{4\,{\rm sh}\,\chi}\right)}{\Gamma\left(\ell+1-\dfrac{i\tilde\alpha_s}{2\,{\rm sh}\,\chi}\right)}$$

— точная фаза кулоновской волновой функции и функция Йоста для кулоновского взаимодействия, с асимптотикой ВКБ-решения в (45),

$$\varphi_\ell^{L}(r,\chi_n)\big|_{\rho\gg1}\sim$$
$$\sim\frac{C_\ell}{\sqrt{{\rm sh}\,\chi_n}}\sin\left[\rho\chi_n-\frac{\pi\ell}{2}+\delta_\ell^{\rm Coul,ВКБ}(\chi_n)\right],$$

находим связь между нормировочными множителями:

$$\left|C_\ell^{\rm Coul}\right|^2=\frac{\Gamma^2(\ell+1)\,(2\,{\rm sh}\,\chi_n)^{2\ell+1}\,e^{-(2\ell+2)\chi_n}L_{\rm РКП}(\chi_n)}{2\Gamma^2(2\ell+2)}\,|C_\ell|^2\,. \qquad (51)$$

Здесь $\delta_\ell^{\rm Coul,ВКБ}(\chi)$ — фаза кулоновской волновой функции в ВКБ-приближении (см. формулы (41) и (42)), а выражения

$$L_{\rm РКП}(\chi)=|F_\ell^{\rm Coul}(\chi)|^{-2}=$$
$$=\prod_{n=1}^{\ell}\left[1+\left(\frac{\tilde\alpha_s}{2n\,{\rm sh}\,\chi}\right)^2\right]S_{\rm РКП}(\chi), \qquad (52)$$

$$S_{\rm РКП}(\chi)=\frac{X_{\rm РКП}(\chi)}{1-\exp[-X_{\rm РКП}(\chi)]}, \qquad (53)$$
$$X_{\rm РКП}(\chi)=\frac{\pi\tilde\alpha_s}{{\rm sh}\,\chi},$$

— релятивистские кулоноподобные ресуммирующие пороговые L- и S-факторы, которые появляются в рассматриваемом РКП-подходе и имеют правильные релятивистские и ультрарелятивистские пределы в отличие от релятивистских поро-

[3)] Такая процедура сшивания для нерелятивистского уравнения Шредингера была предложена в работе [10].

говых S-факторов, представленных в работах [31—33] (подробности см. в работах [27—30]).

Объединяя соотношения (49) и (50) с (51), получаем следующее выражение для оператора $(\Delta^*)^\ell/\ell!$ от квадрата модуля радиальной волновой РКП-функции при $r = i\lambda'$:

$$\lim_{r\to i\lambda'}\left|\frac{(\Delta^*)^\ell}{\ell!}\left(\frac{\varphi_\ell^L(r,\chi_n)}{r}\right)\right|^2 = \tag{54}$$
$$= \lim_{r\to i\lambda'}\left|\frac{(\Delta^*)^\ell}{\ell!}\left(\frac{\varphi_\ell^{\rm Coul}(r,\chi_n)}{r}\right)\right|^2 =$$
$$= \frac{\mu\Gamma^2(\ell+1)}{4\pi^2\lambda'^3m'^2c^2\Gamma^2(2\ell+2)}\left(\frac{2\mu u_n^{\rm rel}}{m'}\right)^{2\ell+1}\times$$
$$\times L_{\text{РКП}}\left(u_n^{\rm rel}\right)\frac{dM_n}{dn},$$

где

$$u^{\rm rel} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \tag{55}$$

— относительная скорость эффективной релятивистской частицы массы m', а скорость u дается выражением

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m'^2c^4}{M^2-(m_1-m_2)^2c^4}},$$

причем $X_{\text{РКП}}(u^{\rm rel}) = 2\pi\kappa_s/u^{\rm rel}, \kappa_s = \alpha_s/\hbar c, \operatorname{sh}\chi = \mu u^{\rm rel}/m'$.

Тогда релятивистская лептонная ширина распада векторного мезона в состоянии с энергией M_n и относительным орбитальным моментом ℓ для случая воронкообразного потенциала вида (34) в соответствии с соотношениями (44) и (54) дается выражением

$$\Gamma_{n,\ell}(e^+e^-) = \frac{4\alpha^2e_q^2\mu\Gamma^2(\ell+1)}{\pi\lambda'^3m'^2c^2\Gamma^2(2\ell+2)M_n^2}\times \tag{56}$$
$$\times\left(\frac{2\mu u_n^{\rm rel}}{m'}\right)^{2\ell+1}L_{\text{РКП}}\left(u_n^{\rm rel}\right)\frac{dM_n}{dn},$$

которое можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (34), т.е. при $\alpha_s = 0$. В частности, при $\ell = 0$ выражение (56) переходит в соотношение [34]

$$\Gamma_{n,0}(e^+e^-) = \tag{57}$$
$$= \frac{8\alpha^2e_q^2\mu^2u_n^{\rm rel}}{\pi\lambda'^3m'^3c^2M_n^2}S_{\text{РКП}}\left(u_n^{\rm rel}\right)\frac{dM_n}{dn},$$

а при $\alpha_s = 0$ последнее выражение принимает вид

$$\Gamma_{n,0}(e^+e^-) = \frac{8\alpha^2e_q^2\mu^2u_n^{\rm rel}}{\pi\lambda'^3m'^3c^2M_n^2}\frac{dM_n}{dn}.$$

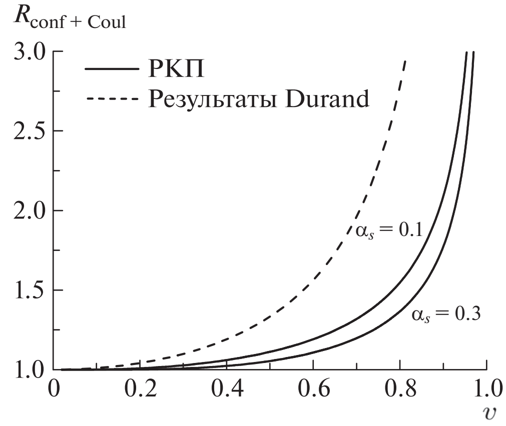

Рис. 2. Поведение функции $R_{\rm conf+Coul}$ — отношения релятивистских выражений (9) и (54), взятого при $\ell = 0$, $m_1 = m_2 = m$, $\hbar = c = 1$, к нерелятивистскому аналогу (5) для случая воронкообразного потенциала вида (34).

Также отметим, что для $M_n = (m'^2c^2/\mu)\cos\kappa_n < m'^2c^2/\mu$ выражение (57) переходит в соотношение [34]

$$\Gamma_{n,0}(e^+e^-) = \frac{8\alpha^2e_q^2\tilde\alpha_s\mu}{\lambda'^3m'^2c^2M_n^2}\frac{dM_n}{dn}.$$

Таким образом, роль параметра скорости в (54), (56) и (57) теперь играет скорость эффективной релятивистской частицы (55), выступающей в качестве двухчастичной системы.

Отметим, что при $\ell = 0$, $m_1 = m_2 = m$ и $\hbar = c = 1$ релятивистское выражение (54) по форме совпадает с его нерелятивистским аналогом (5) с заменой $2v_n^{\rm nr} \to u_n^{\rm rel}$. В нерелятивистском пределе $u_n \to 0$ оба выражения воспроизводят нерелятивистский результат.

На рис. 2 показано поведение функции $R_{\rm conf+Coul}$, определенной как отношение релятивистского квадрата модуля волновой функции s-состояния, представленной выражениями (9) и (54), к нерелятивистскому выражению (5) как функции скорости v для случая воронкообразного потенциала (34). Сплошная кривая соответствует выражению (54), взятому при $\ell = 0$, $m_1 = m_2 = m$, $\hbar = c = 1$, а штриховая — выражению (9). Из рис. 2 видно, что в нерелятивистском пределе $(v \to 0)$ релятивистские выражения в (9) и (54) (последнее выражение берется при $\ell = 0$, $m_1 = m_2 = m$, $\hbar = c = 1$) воспроизводят нерелятивистский результат. В то же время имеется существенное отличие нового выражения (54), взятого при $\ell = 0$, $m_1 = m_2 = m$, $\hbar = c = 1$, от релятивистского выражения (9) из-за наличия в его знаменателе дополнительного множителя $\sqrt{1-v_n^2}$. Причина этого различия связана с формулой (26) из работы [35], которая была получена в нерелятивистском случае. Это не позволило авторам в [35] правильно определить в релятивистском случае нормировочный фактор волновой функции, который был выбран равным единице, что и приводит к различию в релятивистском пределе ($v_n \to 1$) в формулах (7) и (9) из-за множителя $\sqrt{1-v_n^2}$ в их знаменателях.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в релятивистском квазиклассическом приближении получены новые релятивистские выражения для условий квантования и лептонных ширин распадов векторных мезонов. Рассмотрение проводится для случая, когда релятивистские кварки, составляющие векторные мезоны, взаимодействуют посредством несингулярных запирающих потенциалов либо когда к несингулярному потенциалу запирания добавляется кулоновское взаимодействие (приближение инстантонного взаимодействия). Для этой цели было использовано полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении [20] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс. РКП-уравнение решено релятивистским ВКБ-методом. Установлено условие применимости ВКБ-приближения. Получены простые формулы для определения спектра масс и реджевских траекторий мезонов, рассматриваемых как системы двух связанных кварков. Проведено сравнение новых релятивистских выражений для лептонных ширин распадов векторных мезонов с их нерелятивистскими и релятивистскими аналогами.

Показано, что в рамках рассматриваемого полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля новые модифицированные релятивистские квазиклассические условия квантования устанавливают явную зависимость относительного орбитального момента ℓ от энергии резонансов, что определяет релятивистские траектории Редже семейства векторных мезонов как системы двух связанных кварков. Полученные формулы позволяют учитывать влияние различия масс m_1, m_2 и константы кулоновского взаимодействия α_s при вычислении уровней энергий и реджевских траекторий двухчастичных связанных систем.

Установлено, что модифицированное релятивистское квазиклассическое условие квантования для случая, когда к несингулярному потенциалу запирания добавляется кулоновское взаимодействие, включает в себя поправочный член в виде фазы релятивистской кулоновской функции в ВКБ-приближении, взятой в точке поворота r_+, которая соответствует несингулярному запирающему (конфайнментному) потенциалу.

Выполненный анализ показал, что новое релятивистское выражение для квадрата модуля s-волновой РКП-функции, представленной выражением (54), взятым при $\ell = 0$, $m_1 = m_2 = m$, $\hbar = c = 1$, по форме совпадает с его нерелятивистским аналогом (5) с заменой $2v_n^{\text{nr}} \to u_n^{\text{rel}}$. В то же время оно существенно отличается от соответствующего релятивистского выражения (9) наличием в его знаменателе дополнительного множителя $\sqrt{1-v_n^2}$, появляющегося из-за неправильного определения в релятивистском случае нормировочного фактора волновой функции. Более того, в новом выражении роль параметра скорости теперь играет скорость эффективной релятивистской частицы (55), выступающей в качестве двухчастичной системы. В нерелятивистском пределе $u_n \to 0$ новое выражение имеет правильный нерелятивистский предел.

Поскольку выражения для релятивистских квазиклассических условий квантования и лептонных ширин распадов векторных мезонов получены в рамках полностью ковариантного метода, то можно ожидать, что они более полно учитывают релятивистский характер взаимодействующих частиц.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой за обсуждение полученных результатов, ценные замечания и техническую поддержку, А.Е. Дорохову, Ю.А. Курочкину, И.С. Сацункевичу, В.В. Андрееву, В.В. Скалозубу и А.В. Киселеву за обсуждение полученных результатов, их комментарии и стимулирующие дискуссии, Ю.С. Вернову и М.Н. Мнацакановой за проявленный интерес и постоянную поддержку.

Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2016–2020 гг. "Конвергенция-2020", подпрограмма "Микромир, плазма и Вселенная".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Barbieri, R. Kögerler, Z. Kunszt, and R. Gatto, Nucl. Phys. B **105**, 125 (1976).
2. R. McClary and N. Byers, Phys. Rev. D **28**, 1692 (1983).
3. E. Etim and L. Schülke, Nuovo Cimento A **77**, 347 (1983).
4. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **30**, 1904 (1984).
5. В. А. Матвеев, Б. В. Струминский, А. Н. Тавхелидзе, Препринт № Р-2524, ОИЯИ (Дубна, 1965).
6. R. Van Royen and V. F. Weisskopf, Nuovo Cimento A **50**, 617 (1967).
7. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kögerler, and Z. Kunszt, Phys. Lett. B **57**, 455 (1975).

8. C. Quigg and J. L. Rosner, Phys. Rev. D **17**, 2364 (1978).
9. J. S. Bell and P. Pasupathy, Phys. Lett. B **83**, 389 (1979).
10. J. S. Bell and J. Pasupathy, Z. Phys. C **2**, 183 (1979).
11. N. Fröman and P. O. Fröman, J. Phys. France **42**, 1491 (1981).
12. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **25**, 2312 (1982).
13. B. Durand and L. Durand, Phys. Lett. B **113**, 338 (1982).
14. E. A. Tainov, Z. Phys. C **10**, 87 (1981).
15. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
16. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).
17. V. G. Kadyshevsky and M. D. Mateev, Nuovo Cimento A **55**, 275 (1968).
18. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [Sov. Phys. Dokl. **10**, 46 (1965)].
19. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, Nuovo Cimento A **55**, 233 (1968).
20. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 388 (1970)].
21. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1971) [Sov. J. Part. Nucl. **2** (3), 69 (1972)].
22. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **31**, 1332 (1980) [Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 686 (1980)].
23. А. В. Сидоров, Н. Б. Скачков, ТМФ **46**, 213 (1981) [Theor. Math. Phys. **46**, 141 (1981)]; Препринт № Р2-80-45, ОИЯИ (Дубна, 1980); V. I. Savrin, A. V. Sidorov, and N. B. Skachkov, Hadronic J. **4**, 1642 (1981).
24. D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, Phys. Lett. B **635**, 93 (2006).
25. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ТМФ **64**, 179 (1985); **66**, 399 (1986) [Theor. Math. Phys. **64**, 765 (1985); **66**, 264 (1986)].
26. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
27. Ю. Д. Черниченко, Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, №4, 81 (2009).
28. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **73**, 1658 (2010) [Phys. Atom. Nucl. **73**, 1612 (2010)].
29. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ТМФ **166**, 225 (2011) [Theor. Math. Phys. **166**, 194 (2011)].
30. Ю. Д. Черниченко, *Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния* (Изд. центр УО ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, 2011), с. 237.
31. A. H. Hoang, Phys. Rev. D **56**, 7276 (1997).
32. J.-H. Yoon and Ch.-Y. Wong, Phys. Rev. C **61**, 044905 (2000); J. Phys. G **31**, 149 (2005).
33. A. B. Arbuzov, Nuovo Cimento A **107**, 1263 (1994).
34. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, in *Proceedings of the X International School-Seminar on the Actual Problems of Microworld Physics, Aug. 1–12, 2011, Gomel, Belarus*, Preprint No. E1, 2-2013-23, JINR (Dubna, 2013), p. 61.
35. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **28**, 396 (1983).

MASS SPECTRUM AND LEPTONIC WIDTHS OF MESONS IN RELATIVISTIC QUASIPOTENTIAL APPROACH

V. V. Kondratjuk, Yu. D. Chernichenko

The new relativistic quantization conditions and leptonic decay widths in quantum chromo-dynamics for the nonsingular confining and the singular confining Coulomb-like quasipotentials are obtained. Consideration is conducted within the framework of completely covariant of the quasipotential approach in quantum field theory, formulated in the relativistic configurational representation in the case of two relativistic spinless particles of arbitrary masses.