Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 4

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. А. БУЛГАКОВ и Г. Н. АЛЯБЬЕВА

ФУНКЦИЯ ПЕРЕДАЧИ УСИЛИТЕЛЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ОДИНАКОВЫХ КАСКАДОВ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 28 VII 1949)

Функция передачи усилителя с обратной связью ([1]), состоящего из n одинаковых каскадов, имеет простое аналитическое выражение в замкнутой форме в случае, когда функция передачи каждого каскада имеет вид

$$Q(t) = Q(1 - e^{-t/T}), \tag{1}$$

где Q — статический коэффициент передачи.

Под функцией передачи некоторой передающей системы, в данном случае усилителя, понимается зависимость от времени сигнала на выходе, вызванного приложением единичного возмущения

$$U_{вх}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

на входе усилителя.

Динамический коэффициент передачи одного каскада, определенный как изображение функции передачи (1) по Лапласу — Карсону:

$$Q(p) = \frac{Q}{1 + Tp}. \tag{2}$$

Динамический коэффициент передачи усилителя из n каскадов без обратной связи выражается

$$Q_n(p) = Q^n(p) = \frac{Q^n}{(1 + Tp)^n}. \tag{3}$$

При введении в усилитель цепи обратной связи, которая подает на вход усилителя β-ю часть сигнала с выхода, коэффициент передачи усилителя получается равным:

$$Q_з(p) = \frac{Q^n(p)}{1 - \beta Q^n(p)}. \tag{4}$$

Для функции передачи усилителя из n каскадов с отрицательной обратной связью ($\beta < 0$) можно получить известными методами, как оригинал от (4), выражение

$$Q_з(t) = \frac{Q^n}{1 + \beta Q^n} + \frac{Q^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{p_k t}}{Tp_k (1 + Tp_k)^{n-1}}. \tag{5}$$

Здесь p_k суть корни уравнения

$$(1+Tp)^n + \beta Q^n = 0 \tag{6}$$

и выражаются посредством корней n-й степени из коэффициента обратной связи со знаком минус $-\beta Q^n$, так как

$$(1+Tp) = \sqrt[n]{-\beta Q} = Q\sqrt[n]{\beta}\left(\cos\frac{(1+2s)\pi}{n} + j\sin\frac{(1+2s)\pi}{n}\right), \tag{7}$$

где $s = 0, 1, \ldots, n-1$, $s = k-1$.

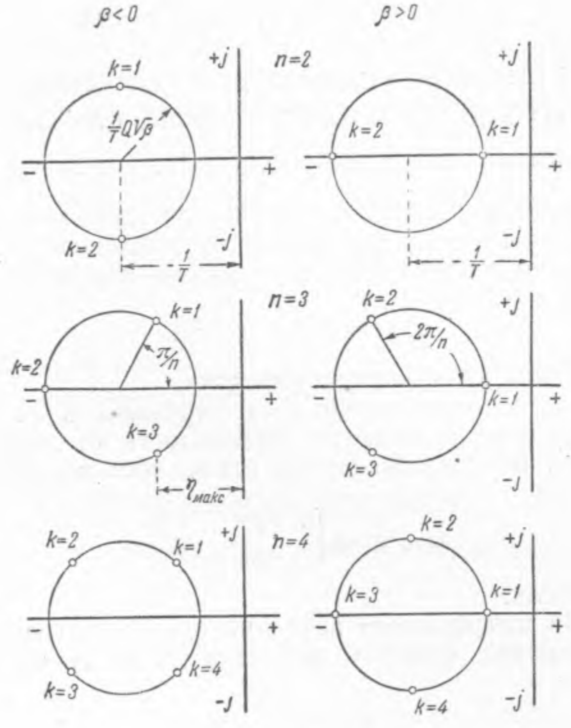

Рис. 1

При n четном все корни уравнения (6) комплексные попарно сопряженные, при n нечетном один корень $\left(s = \frac{n-1}{2}\right)$ вещественный отрицательный, остальные комплексные попарно сопряженные (рис. 1). Общее выражение корней

$$p_k = \frac{1}{T}\left[-1 + Q\sqrt[n]{\beta}\cos\frac{(1+2s)\pi}{n} + jQ\sqrt[n]{\beta}\sin\frac{(1+2s)\pi}{n}\right]. \tag{8}$$

После подстановки в (5) корней (8) и объединения попарно членов с сопряженными корнями выражение (5) для функции передачи получит вид:

в случае n четного:

$$Q_з(t) = \frac{Q^n}{1+\beta Q^n} - 2\frac{Q\sqrt[n]{\beta}}{\beta n}\sum_{k=1}^{{}^1\!/_2\, n}\frac{\sin(\nu_k t + \varphi_k)}{\sqrt{1+\left(Q\sqrt[n]{\beta}\right)^2 - 2Q\sqrt[n]{\beta}\cos\frac{(1+2s)\pi}{n}}}\, e^{-\eta_k t}; \tag{9}$$

в случае n нечетного:

$$Q_3(t)=\frac{Q^n}{1+\beta Q^n}-\frac{1}{\beta n}\,\frac{Q\sqrt[n]{\beta}}{1+Q\sqrt[n]{\beta}}\,e^{-\left(1+Q\sqrt[n]{\beta}\right)\frac{t}{T}}-$$

$$-2\frac{Q\sqrt[n]{\beta}}{\beta n}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\sin(\nu_k t+\varphi_k)}{\sqrt{1+\left(Q\sqrt[n]{\beta}\right)^2-2Q\sqrt[n]{\beta}\cos\frac{(1+2s)\pi}{n}}}\,e^{-\eta_k t}. \qquad (10)$$

Здесь:
коэффициенты затухания

$$\eta_k=-\frac{1}{T}\left[1-Q\sqrt[n]{\beta}\cos\frac{(1+2s)\pi}{n}\right]; \qquad (11)$$

частоты собственных колебаний

$$\nu_k=\frac{1}{T}\,Q\sqrt[n]{\beta}\sin\frac{(1+2s)\pi}{n}; \qquad (12)$$

фазовые углы

$$\varphi_k=\operatorname{arc\,tg}\frac{Q\sqrt[n]{\beta}-\cos\frac{(1+2s)\pi}{n}}{\sin\frac{(1+2s)\pi}{n}}. \qquad (13)$$

Устойчивость усилителя определяется условием, при котором наименьший коэффициент затухания η_k, имеющий место при $s=0$ (рис. 1), положителен и выражается неравенством

$$Q\sqrt[n]{\beta}\cos\frac{\pi}{n}<1, \qquad (14)$$

причем устойчивость не зависит от постоянной времени каскадов T.

В случае положительной обратной связи ($\beta>0$) корни на комплексной плоскости смещаются по окружности относительно их расположения при отрицательной обратной связи на угол π/n по часовой стрелке. Функция передачи коэффициента затухания, частоты собственных колебаний и их фазы выражаются теми же формулами (9)—(13), но с заменой в них аргумента $\frac{(1+2s)\pi}{n}$ на $\frac{2s\pi}{n}$. Условие устойчивости имеет место при $s=0$, когда корень имеет только вещественную часть, и определяется формулой

$$Q\sqrt[n]{\beta}<1, \qquad (15)$$

т. е. при положительной обратной связи и $\beta=1$ статический коэффициент передачи Q одного каскада устойчивого усилителя не может превышать единицу независимо от величины постоянной времени каскада T.

Поступило
7 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Михайлов, ЖТФ, 9, 1 (1939). [2] К. А. Круг, Переходные процессы в линейных электрических цепях, 1948.