Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. ХАРКЕВИЧ

СТЕПЕННЫЕ РУПОРЫ И СТОКСОВЫ ПОЛИНОМЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 30 VII 1949)

§ 1. Степенными называются рупоры, расширяющиеся по закону

$$S = ax^{2n}, \tag{1}$$

где S — площадь поперечного сечения рупора, x — координата, отсчитываемая вдоль оси рупора.

Одномерное волновое уравнение для волновода с переменным сечением гласит

$$p'' + \frac{S'}{S} p' + k^2 p = 0, \tag{2}$$

где p — избыточное давление, $k = \omega / c$ — волновое число.

Используя (1), получаем уравнение степенного рупора

$$p'' + \frac{2n}{x} p' + k^2 p = 0. \tag{3}$$

Обычный прием решения этого уравнения состоит в том, что подстановкой

$$y = px^{n-1/2}$$

приводят (3) к уравнению Бесселя и получают решение в бесселевых (в частности, ханкелевых) функциях. Ограничиваются обычно целыми n; при этом решение выражается через элементарные функции.

§ 2. Возможен другой путь. Будем искать решение в виде

$$p = A_n (jkx)^{-n} e^{-jkx} f(jkx) \tag{4}$$

(A_n — постоянная).

Подстановка этого выражения в (3) дает

$$f'' - 2f' - \frac{n(n-1)}{(jkx)^2} f = 0. \tag{5}$$

Функция $f_{n-1}(jkx)$, определяемая уравнением (5), представляет собою полином, введенный Стоксом [1] *.

* Полиномы f_n введены Стоксом в связи с разложением решения волнового уравнения по сферическим функциям.

Стоксовы полиномы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&f_0(z)=1,\\
&f_1(z)=1+\frac{1}{z},\\
&f_2(z)=1+\frac{3}{z}+\frac{3}{z^2},\\
&f_3(z)=1+\frac{6}{z}+\frac{15}{z^2}+\frac{15}{z^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_n(z)=1+\frac{n(n+1)}{2z}+\frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2\cdot 4z^2}+\cdots+\frac{1.2\cdot 3\ldots 2n}{2.4.6\ldots 2nz^n}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Итак, (4) дает решение волнового уравнения (3), выраженное через стоксов полином порядка $n-1$. Из (4) сразу видно, что в степенных рупорах дисперсия отсутствует.

§ 3. Основной задачей теории рупоров является нахождение входного сопротивления рупора, определяемого как

$$\mathfrak{z}=\frac{pS}{v}, \tag{7}$$

где v — колебательная скорость. В силу общей связи между p и v через потенциал φ $(p=\rho_0\,\partial\varphi/\partial t,\ v=-\partial\varphi/\partial x)$, можем записать (7) в виде

$$\mathfrak{z}=-jkwS\frac{p}{p'}. \tag{8}$$

Дифференцируя (4), получим

$$p'=-A_n jk\,(jkx)^{-n}e^{-jkx}\left[\left(\frac{n}{jkx}+1\right)f_{n-1}-f'_{n-1}\right]. \tag{9}$$

Но из (6) может быть выведено следующее рекуррентное соотношение:

$$\left(\frac{n}{z}+1\right)f_{n-1}(z)-f'_{n-1}(z)=f_n(z), \tag{10}$$

и, таким образом,

$$p'=-A_n jk\,(jkx)^{-n}\,e^{-jkx}f_n(jkx). \tag{11}$$

Для сопротивления степенного рупора получаем окончательно

$$\mathfrak{z}_n=wS\,\frac{f_{n-1}(jkx)}{f_n(jkx)}, \tag{12}$$

что представляет собою наиболее простую форму выражения этой величины.

§ 4. Может быть показано, что для стоксовых полиномов (6) справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$f_n(z)=\frac{2n-1}{z}f_{n-1}(z)+f_{n-2}(z), \tag{13}$$

или

$$\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}=\frac{2n-1}{z}+\frac{f_{n-2}(z)}{f_{n-1}(z)}. \tag{14}$$

Последовательно применяя это соотношение, можем представить (12) в виде непрерывной дроби

$$\mathfrak{z}'_n = \frac{\mathfrak{z}_n}{wS} = \frac{1}{f_n/f_{n-1}} = \cfrac{1}{\cfrac{2n-1}{jkx} + \cfrac{1}{\cfrac{2n-3}{jkx} + \cfrac{1}{\cfrac{2n-5}{jkx} + \cfrac{1}{\cfrac{2n-7}{jkx} + \cdots}}}}\,. \tag{15}$$

В частности,

$$\mathfrak{z}'_1 = \cfrac{1}{\cfrac{1}{jkx}+1},$$

$$\mathfrak{z}'_2 = \cfrac{1}{\cfrac{3}{jkx} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{jkx}+1}}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{z}'_3 = \cfrac{1}{\cfrac{5}{jkx} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{jkx} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{jkx}+1}}}$$

и т. д.

§ 5. Замечая, что

$$jkxwS = j\omega\rho_0 xS = j\omega m \quad (m = \rho_0 xS),$$

$$\frac{wS}{jkx} = \frac{\rho_0 c^2 S}{j\omega x} = \frac{1}{j\omega C} \qquad \left(C = \frac{x}{\rho_0 c^2 S}\right),$$

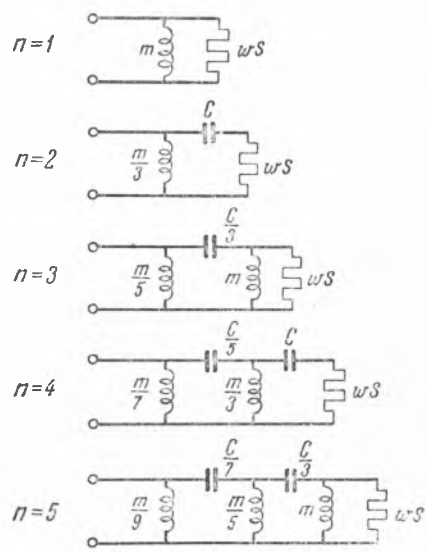

Рис. 1

можем на основании (16) составить электрические эквивалентные схемы входного сопротивления степенного рупора в духе первой системы электромеханических аналогий (рис. 1). Заметим, что для $n = 1$ (конический рупор) эквивалентная схема совпадает с эквивалентной схемой сопротивления шаровой антенны нулевого порядка, как оно и должно быть, так как в коническом рупоре распространяется ограниченная определенным телесным углом шаровая волна.

§ 6. Желательно также получить эквивалентную схему для сопротивления экспоненциального рупора, являющегося, как известно, предельным членом семейства степенных рупоров.

Исходя из соотношения

$$S = S_0 e^{\alpha x},$$

получаем для сопротивления

$$\frac{\mathfrak{z}}{wS} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{j\omega} + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Замечая, что

$$\frac{\omega_0}{j\omega wS} = \frac{\alpha}{j\,2\omega\rho_0 S} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{j\omega m} \qquad \left(m = \frac{\rho_0 S}{\alpha}\right),$$

можем представить эквивалентную схему экспоненциального рупора как показано на рис. 2.

При всей своей простоте эта схема неприятна тем, что в нее входит зависящий от частоты параметр

$$r = \frac{wS}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

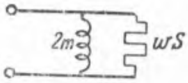

Рис. 2

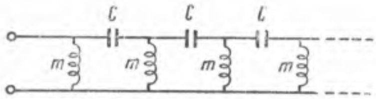

Рис. 3

Но в выражении для r нетрудно узнать формулу для характеристического сопротивления П-звена

$$z_{\Pi} = \frac{2z_2}{\sqrt{1 + 4\frac{z_2}{z_1}}}.$$

В нашем случае

$$z_2 = j\omega m, \quad z_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad \left(m = \frac{\rho_0 S}{\alpha}, \quad C = \frac{1}{\rho_0 c^2 \alpha S}\right),$$

и эквивалентная схема принимает вид бесконечного фильтра верхних частот с несимметричным входом (рис. 3).

Поступило
16 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Phil. Trans. Roy. Soc., 158, 447 (1868); Рэлей, Теория звука, 2, 1944, § 323.