Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. Г. МАГНАРАДЗЕ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ И. И. ПРИВАЛОВА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И К СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 1 VIII 1949)

1. Пусть L — простая замкнутая кусочно-гладкая линия, определенная уравнением $t = x(s) + iy(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, где x, y — прямолинейные, прямоугольные координаты, s — дуговая абсцисса, отсчитанная от некоторой фиксированной точки этой линии, а l — длина всей линии. Пусть на этой линии определена действительная или комплексная функция $\varphi(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L. \tag{1}$$

В том случае, когда L есть окружность, вместо ψ мы будем рассматривать функцию, определенную следующим образом:

$$g(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{ctg} \frac{x_0 - x}{2} dx, \quad f(0) = f(2\pi), \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 2\pi. \tag{2}$$

П. Фату ([1]) доказал, что если f удовлетворяет на сегменте $[0, 2\pi]$ условию Гельдера с показателем α, то g удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta = \alpha / (\alpha + 1)$.

И. Племель ([2]) показал, правда не совсем строго, что если φ удовлетворяет на линии L условию Гельдера с показателем $\alpha < 1$, а L — произвольная простая гладкая линия, то ψ также удовлетворяет условию Гельдера с тем же показателем.

И. И. Привалов ([3]) доказал следующую важную теорему: если f на сегменте $[0, 2\pi]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha < 1$, то g также удовлетворяет условию Гельдера с тем же показателем; но, если f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha = 1$, то g удовлетворяет условию вида $|g(x_2) - g(x_1)| = O(|x_2 - x_1| |\log|x_2 - x_1||)$, где x_1 и x_2 — любые две точки на сегменте $[0, 2\pi]$.

Теорема Привалова была обобщена А. Зигмундом ([4]) на более общий класс непрерывных функций, чем класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера (см. ниже). Этот результат был вновь получен И. Кравченко ([5]).

И. И. Привалов ([6]) показал, что теорему, установленную им для функций f и g, можно обобщить на функции φ и ψ при условии, если L — кусочно-гладкая линия без точек возврата.

Н. И. Мусхелишвили ([7]) распространил результаты И. И. Привалова на любые кусочно-гладкие линии в предположении, что φ удовлетворяет условию Гельдера.

В статье ([8]) мы обобщили результаты, установленные в работах ([2–7]), на тот случай, когда функция φ принадлежит к классу непрерывных функций, удовлетворяющих более общему условию, чем условие Гельдера, а L — произвольная простая замкнутая кусочно-гладкая линия.

В статьях ([9–11]) мы вкратце указали некоторые применения этих результатов к одной линейной граничной задаче теории функций комплексного переменного и к теории линейных сингулярных интегральных уравнений.

В настоящей статье мы остановимся на некоторых дальнейших применениях упомянутых результатов.

2. Пусть сперва L есть простая замкнутая гладкая линия.

Введем модуль непрерывности функции $\varphi(t)$, т. е. функцию

$$\omega(\tau;\ \varphi)=\sup_{|s_2-s_1|\leqslant\tau}|\varphi(t(s_2))-\varphi(t(s_1))|,\quad 0<\tau\leqslant l.$$

Между модулями непрерывности функций φ и ψ, связанных равенством (1), существует следующее неравенство ([8]):

$$C\omega(\tau_0;\ \psi)\leqslant\omega(\tau_0;\ \varphi)+\int_0^{\tau_0}\frac{\omega(\tau;\ \varphi)}{\tau}\,d\tau+\tau_0\int_{\tau_0}^{l}\frac{\omega(\tau;\ \varphi)}{\tau^2}\,d\tau,\quad 0<\tau_0\leqslant l_0,\qquad (3)$$

где C — определенная положительная постоянная, зависящая только от вида линии L, а l_0 — достаточно малое положительное число, меньшее l.

Аналогичное неравенство, относящееся к функциям f и g, связанным равенством (2), было давно установлено А. Зигмундом ([4]).

Обозначим через $H_\alpha\Lambda_p$ класс функций F, удовлетворяющих условию

$$\omega(\tau;\ F)=O\left(\tau^\alpha\log^{-p}\frac{1}{\tau}\log_2^{p_2}\frac{1}{\tau}\cdots\log_m^{p_m}\frac{1}{\tau}\right),\quad 0<\tau\leqslant l_0,\qquad (4)$$

где α, p, $p_2,\ldots,p_m$ — действительные числа.

А. Зигмунд ([4]) показал, исходя из неравенства, аналогично неравенству (3), что если $f\in H_\alpha\Lambda_p$ $(0<\alpha<1)$, то $g\in H_\alpha\Lambda_p$; если $f\in H_1\Lambda_{p+1}$ $(p<0)$, то $g\in H_1\Lambda_p$; если $f\in H_1\Lambda_{p+1}$ $(p>0)$, то $g\in H_1$; если $f\in H_0\Lambda_{p+1}$ $(p>0)$, то $g\in H_0\Lambda_p$.

Пользуясь неравенством (3), легко видеть, что упомянутые соотношения между классами остаются в силе и для функций φ и ψ.

Нетрудно также видеть, что упомянутые соотношения между классами остаются в силе и в том случае, когда в (4) символ O заменен символом o.

В дальнейшем, для простоты изложения, мы будем считать, что $p_2=p_3=\ldots=p_m=0$ и вместо $H_0\Lambda_p$ в случае символа O будем писать просто Λ_p, а в случае символа o — просто D_p.

Через $I_p\,(p\geqslant 0)$ обозначим класс функций F, для которых выражение $I(\tau;\ F)\left(\log\frac{l}{\tau}\right)^p$, где $I(\tau;\ F)=\omega(\tau;\ F)/\tau$, интегрируемо на сегменте $[0,\ l]$.

На основании неравенства (3) можно показать, что если $\varphi\in I_{p+1}$, то $\psi\in I_p$ ([8]).

Легко проверить, что $\Lambda_p\in I_0$ при любом $p>1$, $I_{p+1}\in\Lambda_{p+2}\in I_p$ и $I_p\in D_{p+1}\in\Lambda_{p+1}$.

Теперь рассмотрим пересечения классов $\Pi H_1\Lambda_p$, $\Lambda_\infty=\Pi\Lambda_p$, $D_\infty=\Pi D_p$ и $I_\infty=\Pi I_p$. Легко видеть, что $\Lambda_\infty=D_\infty=I_\infty$.

Введя функцию, определенную при помощи ряда $\Sigma a_n e^{-1/\lambda_n}(s/l)^{\lambda_n}$, где $a_n > 0$, $0 < \lambda_n \leqslant 1$, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\Sigma a_n < +\infty$, легко показать, что класс I_∞ является более общим, чем класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера ([8]).

Нетрудно показать, что если φ_1 и φ_2 принадлежат к какому-нибудь из упомянутых классов, то $\varphi_1 \pm \varphi_2$, $\varphi_1\varphi_2$, φ_1/φ_2 ($\varphi_2 \neq 0$ на L) принадлежат к тому же классу.

Легко обобщить определения упомянутых классов на случай функций от многих независимых переменных.

3. Пусть теперь L — произвольная простая замкнутая, кусочно-гладкая линия. Для того чтобы приведенные выше результаты обобщить на случай такой линии L, мы пользуемся одним приемом, предложенным Н. И. Мусхелишвили ([7]) для обобщения теоремы И. И. Привалова на любые кусочно-гладкие линии в случае, когда $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. В основе этого приема лежит следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы, справедливой для функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера ([7]), и касающаяся поведения аналитической функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,\ z \text{ не лежит на } L, \tag{5}$$

в окрестности линии L: если $\varphi(t)$ на L принадлежит к одному из классов $H_\alpha\Lambda_p$ $(0<\alpha<1)$, $H_1\Lambda_{p+1}(p<0)$, $H_1\Lambda_{p+1}$ $(p>0)$, $\Lambda_{p+1}(p>0)$, $D_{p+1}(p>0)$, $H_1\Lambda_\infty$ и I_∞, то в односторонних окрестностях линии L $\Phi(z)$ принадлежит к соответствующему из классов $H_\alpha\Lambda_p$, $H_1\Lambda_p$, H_1, Λ_p, D_p, $H_1\Lambda_\infty$ и I_∞ ([8]).

4. Перейдем теперь к некоторым применениям вышеприведенных результатов. При этом для простоты будем считать, что L есть простая замкнутая гладкая линия.

Пусть D^+ — конечная открытая плоская область, ограниченная линией L. Через D^- обозначим бесконечную часть плоскости, дополняющую множество $D^+ + L$ до полной плоскости.

Легко видеть ([9]), что если $\varphi \in I_0$ (в частности, если $\varphi \in \Lambda_p(p>1)$), то для аналитической функции (5) справедливы формулы Племеля — Привалова: $\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \Phi(t_0)$ и $\Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \Phi(t_0)$, где $\Phi(t_0)$ означает главное значение интеграла (5) в точке $z = t_0 \in L$, а граничные значения $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ на L достигаются, соответственно, из областей D^+ и D^- по любым путям.

Если $\varphi \in I_1$ (в частности, если $\varphi \in \Lambda_p$ $(p>2)$), то справедливы формула Пуанкаре — Бертрана, формула обращения и аналогичные.

Теперь рассмотрим следующую граничную задачу: найти *кусочно-голоморфную функцию* $\Phi(z)$, *имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на } L, \tag{6}$$

где $G(t)$ *и* $g(t)$ — *заданные на* L *функции.*

Можно показать, что если функции $G(t) \neq 0$ и $g(t)$ принадлежат к одному из классов: $H_\alpha\Lambda_p$ $(0<\alpha<1)$, $H_1\Lambda_{p+1}(p<0)$, $H_1\Lambda_{p+1}(p>0)$, $\Lambda_{p+1}(p>0)$, $D_{p+1}(p>0)$, $I_{p+1}(p\geqslant 0)$ и I_∞, то граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ искомой аналитической функции принадлежат соответственно к классам: $H_\alpha\Lambda_p$, $H_1\Lambda_p$, H_1, Λ_p, D_p, I_p и I_∞.

Такой же результат получается и для граничной задачи со многими неизвестными функциями, аналогичной граничной задаче (6).

Как и в случае функций, удовлетворяющих условию Гельдера, граничная задача (6) тесно связана с теорией сингулярных интегральных уравнений вида

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)}{t-t_0}\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{7}$$

где $A^2(t) \neq K^2(t, t)$ на L.

Можно показать, что если A, K и f принадлежат к одному из классов: $H_\alpha\Lambda_p$ $(0<\alpha<1)$ и I_∞, то всякое ограниченное решение уравнения (7) принадлежит к соответствующему из этих классов; если A и K принадлежат к одному из классов: $H_1\Lambda_{p+2}(p<-1)$, $H_1\Lambda_{p+2}(p>-1)$, $\Lambda_{p+2}(p>0)$, $D_{p+2}(p>0)$, I_{p+2} $(p\geqslant 0)$, а f — к одному из классов: $H_1\Lambda_{p+1}(p<0)$, H_1, $\Lambda_{p+1}(p>0)$, $D_{p+1}(p>0)$, $I_{p+1}(p\geqslant 0)$, то всякое ограниченное решение уравнения (7) принадлежит к соответствующему из классов $H_1\Lambda_p$, $H_1\Lambda_{-1}$, Λ_p, D_p и I_p; если же $A, K \in I_{p+1}(p\geqslant 0)$, а $f\in I_p(p\geqslant 0)$, то $\varphi \in D_{p+1}$.

Полученные результаты можно применить к некоторым другим линейным граничным задачам аналитических и гармонических функций и линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Мы здесь не указываем исследований других авторов, связанных с граничной задачей (6) и с общей теорией сингулярных интегральных уравнений вида (7), так как об этом довольно подробно сказано в монографии Н. И. Мусхелишвили (7).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз. ССР

Поступило
28 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Fatou, Acta Mathematika, **30**, 335 (1906). [2] J. Plemelj, Monatsh. f. Math. u. Phys., **19**, 205 (1908). [3] И. И. Привалов, Bull. de la Soc. Math. de France, 44, 100 (1916). [4] A. Zygmund, Prace Mat.-Fiz., **33**, 125 (1924). [5] J. Kravtchenko, C. R., **219**, 47 (1944). [6] И. И. Привалов, ДАН, **23**, 9 (1939), [7] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946. [8] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, 8, 509 (1947). [9] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, 9—10, 585 (1947). [10] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, **8**, 9—10, 591 (1947). [11] Л. Г. Магнарадзе, ДАН, **64**, № 1 (1949).