Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 25 VI 1949)

В настоящей работе рассматривается пара интегральных преобразований ([1])

$$G(\tau)=\int\limits_0^\infty g(x)p(x,\tau)\,dx,\qquad g(x)=\int\limits_0^\infty G(\tau)p(x,\tau)\,d\tau,$$
$$p(x,\tau)=\frac{\sqrt{2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}}{\pi}\,\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}},\tag{1}$$

$K_\nu(x)$ — функция Макдональда.

Доказываются теоремы, аналогичные теоремам Парсеваля в теории преобразований Фурье, именно:

Теорема 1. *Пусть $g(x)$ — произвольная вещественная функция, такая, что* 1) $g(x)x^{-3/4}\in L(0,\infty)$ *и* 2) $g(x)\in L_2(0,\infty)$; $G(\tau)$ — *интегральное преобразование $g(x)$, определенное формулой* (1). *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty [G(\tau)]^2\,d\tau=\int\limits_0^\infty [g(x)]^2\,dx.\tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — произвольные вещественные функции, удовлетворяющие условиям* 1) *и* 2), $G_1(\tau)$ *и* $G_2(\tau)$ — *соответственно интегральные преобразования этих функций. Тогда*

$$\int\limits_0^\infty G_1(\tau)\,G_2(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^\infty g_1(x)\,g_2(x)\,dx.\tag{3}$$

Доказательство теоремы 1 основывается на рассмотрении интеграла

$$D(\delta)=\int\limits_0^\infty [G(\tau)]^2\frac{d\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\delta\tau},\tag{4}$$

где δ — положительное число, которое может быть выбрано произвольно малым. Интеграл (4) существует, так как, ввиду 1) и оценки (формула (12) работы ([1])):

$$|p(x,\tau)|\leqslant\frac{A\tau^{1/2}}{x^{3/4}}\quad (A\text{ — абсолютная постоянная});\tag{5}$$

$G(\tau)$ существует (как интеграл Лебега) и представляет непрерывную функцию во всяком конечном промежутке и тройной интеграл, появляющийся при подстановке $G(\tau)$ в (4), сходится абсолютно. Значение интеграла (4) может быть выражено формулой

$$D(\delta)=\int_0^\infty\int_0^\infty g(x)\,g(y)\,dx\,dy\int_0^\infty p(x,\tau)\,p(y,\tau)\frac{d\tau}{\operatorname{ch}\pi\delta\tau},$$

или, если ввести новые переменные $\xi=\lg x$, $\eta=\lg y$,

$$D(\delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\,\Phi(\eta)\,\Psi(\xi,\eta,\delta)\,d\xi\,d\eta, \tag{6}$$

где положено $\Phi(\xi)=e^{\xi/2}g(e^\xi)$ и

$$\Psi(\xi,\eta,\delta)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(e^\xi)\,K_{i\tau}(e^\eta)}{\operatorname{ch}\pi\delta\tau}\,d\tau. \tag{7}$$

Если воспользоваться интегральным представлением [2]

$$K_{i\tau}(x)\,K_{i\tau}(y)=\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi\tau}\int_{|\lg(y/x)|}^\infty J_0\left(\sqrt{2xy\operatorname{ch}s-x^2-y^2}\right)\sin\tau s\,ds, \tag{8}$$

легко получить более удобное выражение

$$\Psi(\xi,\eta,\delta)=-\frac{1}{2\pi\delta}\int_{|\xi-\eta|}^\infty J_0\left(e^{(\xi+\eta)/2}\sqrt{2\operatorname{ch}s-2\operatorname{ch}(\xi-\eta)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}}\right)ds, \tag{9}$$

или, после интегрирования по частям,

$$\Psi(\xi,\eta,\delta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\delta\operatorname{ch}\frac{\xi-\eta}{2\delta}}-\frac{e^{(\xi+\eta)/2}}{2\pi\delta}\int_{|\xi-\eta|}^\infty\frac{J_1\left(e^{(\xi+\eta)/2}\sqrt{2\operatorname{ch}s-2\operatorname{ch}(\xi-\eta)}\right)}{\sqrt{2\operatorname{ch}s-2\operatorname{ch}(\xi-\eta)}}\,\frac{\operatorname{sh}s}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}}\,ds=$$

$$=\Psi_1(\xi,\eta,\delta)-\Psi_2(\xi,\eta,\delta). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), находим

$$D(\delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\,\Phi(\eta)\,\Psi_1(\xi,\eta,\delta)\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\,\Phi(\eta)\,\Psi_2(\xi,\eta,\delta)\,d\xi\,d\eta=D_1-D_2. \tag{11}$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца для двойных интегралов и замечая, что, в силу условия 2), $\Phi(\xi)\in L_2(-\infty,\infty)$, легко убедиться в абсолютной сходимости каждого из интегралов D_1 и D_2 *.

* См., например, ниже (15)—(16).

Мы имеем далее

$$D_1 = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\eta) \frac{d\eta}{\operatorname{ch} \frac{\xi-\eta}{2\delta}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi+t) \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{t}{2\delta}} = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch} \frac{t}{2\delta}}\, dt, \tag{12}$$

где

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\Phi(\xi+t)\, d\xi. \tag{13}$$

Интеграл (13) представляет непрерывную и ограниченную функцию t ([3], стр. 398, пример 20). Опираясь на эти свойства функции $\varphi(t)$, нетрудно показать, что

$$\lim_{\delta \to 0} D_1 = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(\xi)]^2\, d\xi = \int_0^{\infty} [g(x)]^2\, dx. \tag{14}$$

С помощью неравенства Буняковского — Шварца, учитывая симметрию Ψ_2 относительно ξ и η, имеем

$$|D_2| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(\xi)]^2\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_2(\xi, \eta, \delta)|\, d\eta. \tag{15}$$

Из (9) и (10) следует $|\Psi_2(\xi, \eta, \delta)| \leqslant 2\Psi_1(\xi, \eta, \delta)$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_2(\xi, \eta, \delta)|\, d\eta \leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(\xi, \eta, \delta)\, d\eta = 2. \tag{16}$$

С другой стороны, используя интегральное представление для Ψ_2 (10), получаем для $\delta < 1/4$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_2(\xi, \eta, \delta)|\, d\eta \leqslant \frac{1}{4\pi\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi+\eta}\, d\eta \int_{|\xi-\eta|}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2\delta}}\, ds = \frac{1}{4\pi\delta} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2\delta}}\, ds \int_{\xi-s}^{\xi+s} e^{\xi+\eta}\, d\eta =$$

$$= \frac{e^{2\xi}}{2\pi\delta} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 s}{\operatorname{ch} \frac{s}{2\delta}}\, ds = \frac{1}{4} e^{2\xi} (\sec 2\pi\delta - 1). \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) имеем:

$$|D_2| \leqslant \frac{1}{4} e^{2a} (\sec 2\pi\delta - 1) \int_{-\infty}^{a} [\Phi(\xi)]^2\, d\xi + 2 \int_{a}^{+\infty} [\Phi(\xi)]^2\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} e^{2a} (\sec 2\pi\delta - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(\xi)]^2\, d\xi + 2 \int_{a}^{+\infty} [\Phi(\xi)]^2\, d\xi. \tag{18}$$

Так как $\Phi(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$, можно, выбрав соответствующее $a = a(\varepsilon)$, сделать второе слагаемое меньше $^1/_2\,\varepsilon$. После этого можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при всех $\delta \leqslant \delta(\varepsilon)$ первое слагаемое будет не превосходить $^1/_2\,\varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} D_2 = 0. \tag{19}$$

Из (11), (14) и (19) следует

$$\lim_{\delta \to 0} D(\delta) = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\infty \frac{[G(\tau)]^2}{\operatorname{ch} \pi\delta\tau}\, d\tau = \int_0^\infty [g(x)]^2 dx, \tag{20}$$

откуда, по известной теореме ((3), стр. 346, 10.82), вытекает требуемый результат (2).

Теорема 2 является простым следствием теоремы 1.

Пример 1. Положим $g(x) = e^{-x}$. Тогда $G(\tau) = \frac{\sqrt{\pi\tau \operatorname{sh} \pi\tau}}{\operatorname{ch} \pi\tau}$. Прямое вычисление показывает, что, в соответствии с общей теоремой,

$$\pi \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\operatorname{ch}^2 \pi\tau}\, d\tau = \int_0^\infty e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}\,.$$

Пример 2. Пусть $g_1(x) = g(x)$, где $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, $g_2(x) = 1$ для $0 \leqslant x \leqslant \xi$, $g_2(x) = 0$ для $x > \xi$. Тогда, по теореме 2,

$$\int_0^\infty G(\tau) \left\{ \int_0^\xi p(x, \tau)\, dx \right\} d\tau = \int_0^\xi g(x)\, dx,$$

откуда, ввиду произвольности ξ, следует, что почти всюду имеет место формула обращения:

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty G(\tau) \left\{ \int_0^x p(y, \tau)\, dy \right\} d\tau. \tag{21}$$

При возможности выполнить дифференцирование под знаком интеграла формула (21) переходит в формулу обращения (1). Условия, достаточные для справедливости последней формулы, приведены в работе (1).

Теоремы 1 и 2 могут быть использованы для вычисления различного типа определенных интегралов.

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
20 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лебедев, ДАН, 65, № 5, 621 (1949). [2] A. L. Dixon and W. L. Ferrar, Quarterly Journ. Math., 4, 193, 297 (1933). [3] E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Oxford, 1932.