Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. С. ЕСЕНИН-ВОЛЬПИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНОГО БИКОМПАКТА ЛЮБОГО ВЕСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VII 1949)

Под универсальным бикомпактом веса τ в этой работе понимается такой бикомпакт веса τ, который можно непрерывно отобразить на любой бикомпакт веса τ, а следовательно, как нетрудно видеть, и на любой бикомпакт меньшего веса.

П. С. Александров доказал ([1]), что всякий бикомпакт является непрерывным образом нульмерного бикомпакта того же веса. Поэтому при решении вопроса о существовании универсального бикомпакта веса τ достаточно ограничиться рассмотрением нульмерных бикомпактов.

Пусть A — нульмерный бикомпакт веса τ; совокупность всех его открыто-замкнутых подмножеств имеет мощность τ и является базой, а относительно теоретико-множественных операций сложения и пересечения — булевой алгеброй, т. е. коммутативным кольцом с единицей, в котором выполнена аксиома идемпотентности: $a \cdot a = a + a = a$ при любом a и для всякого элемента a существует единственный элемент a', называемый дополнением a, такой, что $a \cdot a' = 0$, $a + a' = 1$. При этом роль сложения и умножения играют теоретико-множественные операции сложения и пересечения, а нулем и единицей служат, соответственно, пустое множество и все пространство.

Wallman ([2]) показал, что для всякой булевой алгебры существует нульмерный бикомпакт, имеющий эту булеву алгебру структурой своих открыто-замкнутых подмножеств. Нетрудно видеть, что эта булева алгебра однозначно определяет соответствующий нульмерный бикомпакт и всякий нульмерный бикомпакт имеет в точности одну базу, являющуюся булевой алгеброй.

Пусть A и B — два нульмерных бикомпакта, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — соответствующие им булевы алгебры. Пусть A можно непрерывно отобразить на B; тогда переход к полным прообразам в A элементов $\mathfrak{B}$ осуществляет изоморфное отображение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, при котором 0 переходит в 0 и 1 в 1 (это последнее условие мы всегда будем подразумевать выполненным, говоря об изоморфизмах булевых алгебр; следовательно, рассматриваемые нами изоморфизмы сохраняют операцию взятия дополнения). Пусть, обратно, $\mathfrak{B}$ можно изоморфно отобразить в $\mathfrak{A}$; тогда A можно непрерывно отобразить на B: достаточно каждой точке $x \in A$ сопоставить в качестве образа точку (как нетрудно видеть, единственную), принадлежащую всем элементам $\mathfrak{B}$, образы которых в $\mathfrak{A}$ содержат точку x.

Таким образом, изучение нульмерных бикомпактов веса τ и их непрерывных отображений друг на друга оказывается равносильным изучению булевых алгебр мощности τ и их изоморфизмов друг в друга, а вопрос о существовании универсального бикомпакта веса τ оказывается равносильным следующему вопросу: существует ли универсальная булева алгебра мощности τ, т. е. такая булева алгебра мощности τ, в которую можно изоморфно отобразить любую булеву алгебру мощности τ.

В этой работе я даю положительный ответ на этот вопрос при условии, что к системе аксиом теории множеств присоединена обобщенная континуум-гипотеза: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ при любом α, непротиворечивость которой была показана Gödel'ем [3].

Пусть φ — наименьшая непредельная мощность такая, что $\tau \leqslant \varphi$; нетрудно видеть, что лексикографически упорядоченное множество последовательностей $(x_0, \ldots, x_\alpha, \ldots, \alpha < \varphi)$, где каждое x_α может принимать значения 0, 1 и 2 и, начиная с некоторого места, всюду стоит 1, обладает следующим свойством (P): любые две навстречу идущие последовательности (так я называю пару монотонных последовательностей, из которых одна монотонно возрастает, другая монотонно убывает и каждый элемент первой последовательности меньше любого элемента второй) его точек мощности $< \tau$ не могут сходиться к одной точке [4]. Дедекиндово замыкание этого множества (с присоединением концов), которое мы обозначим через I_τ, также обладает свойством (P).

Будем называть порцией I_τ пустое множество, интервал (a, b), полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$, или сегмент $[a, b]$; a и b в этом определении предполагаются произвольными различными точками. Порцию с концами a и b будем обозначать $< a, b >$. По аксиоме Цермело, выберем в каждой $< a, b >$ по одной точке c_{ab}.

Пусть R — произвольный бикомпакт веса τ, $\mathfrak{R}$ — соответствующая ему булева алгебра (которая, таким образом, является произвольной булевой алгеброй мощности τ); мы разобьем ее на пары взаимно дополнительных множеств $\{F_\alpha^R, F_\alpha^{R'}\}$, где $'$ есть символ дополнения, α пробегает порядковые числа $< \tau$ и $F_0^R = \Lambda$, $F_0^{R'} = R$. Знак $\tilde{F}_\alpha^R$ будет обозначать F_α^R или $F_\alpha^{R'}$.

Каждому $\tilde{F}_\alpha^R$ мы поставим в соответствие множество $\tilde{\Phi}_\alpha^R$, являющееся суммой порций I_τ и тождественное с определяемым ниже Φ_α^R или $\Phi_\alpha^{R'}$ ($'$ означает здесь дополнение до I_τ) в соответствии с тем, с F_α^R или с $F_\alpha^{R'}$ совпадает $\tilde{F}_\alpha^R$.

Положим $\Phi_0^R = \Lambda$, $\Phi_0^{R'} = I_\tau$.

Сделаем индуктивное предположение, что каждому $\tilde{F}_\alpha^R$, $\alpha < \beta < \tau$, мы уже сопоставили некоторое $\tilde{\Phi}_\alpha^R$, являющееся суммой порций I_τ, и пусть при этом каждое $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{\Phi}_\alpha^R$ есть порция, пустая или непустая одновременно с $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$.

Множества $\tilde{\Phi}_\beta^R$ определим следующим образом. Каково бы ни было непустое $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$, для $\tilde{F}_\beta^R$ имеются три возможности: 1) либо F_β^R не пересекается с $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$; 2) либо $F_\beta^{R'}$ не пересекается с $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$; 3) либо как F_β^R, так и $F_\beta^{R'}$ пересекаются с $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$.

В соответствующей множеству $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ непустой порции $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{\Phi}_\alpha^R = < a, b >$ мы отметим некоторую часть следующим образом: в случае 1) отмеченная часть есть пустое множество; в случае 2) отмеченная часть есть вся порция $< a, b >$; в случае 3) отмеченная часть есть порция $< a, c_{ab}]$.

Сумму всех таких отмеченных порций примем за множество Φ_β^R, его дополнение до I_τ — за $\Phi_\beta^{R'}$. Очевидно, множество всех $\tilde{\Phi}_\alpha^R$, где $\alpha < \beta + 1$, удовлетворяет индуктивному предположению (с заменой β на $\beta + 1$).

Если γ — предельное число $< \tau$ и все $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ при $\alpha < \gamma$ определены, то $\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} \tilde{\Phi}_\alpha^R$ есть порция, пустая лишь в том случае, если пусто соответствующее $\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} \tilde{F}_\alpha^R$. Это следует из определения свойства (P) и замкнутости множеств $\tilde{F}_\alpha^R$ в бикомпакте R.

Это дает возможность определить $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ для любого $\alpha < \tau$. Нетрудно проверить (например, с помощью того, что соответствие между $\tilde{F}_\alpha^R$ и $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ сохраняет непустоту конечных пересечений), что совокупность всех $\tilde{\Phi}_\alpha^R$, где $\alpha < \tau$, относительно теоретико-множественных операций сложения и пересечения образует булеву алгебру, изоморфную $\mathfrak{R}$.

Из обобщенной континуум-гипотезы следует, что совокупность всевозможных $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ по всем R и $\alpha < \tau$ имеет мощность τ. В самом деле, возьмем наименьшую бесконечную непредельную или счетную мощность p_α такую, что $\alpha < p_\alpha \leqslant \tau$; если $0 < \mathfrak{m} < p_\alpha = \aleph_{\gamma+1}$, то $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_\gamma$, и из обобщенной континуум-гипотезы следует $p_\alpha^{\mathfrak{m}} = \aleph_{\gamma+1}^{\mathfrak{m}} = (2^{\aleph_\gamma})^{\mathfrak{m}} = 2^{\aleph_\gamma \mathfrak{m}} = 2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1} = p_\alpha$, т. е. $p_\alpha^{\mathfrak{m}} = p_\alpha$. Очевидно, достаточно доказать, что при любом $\alpha < \tau$ всех Φ_α^R имеется $\leqslant p_\alpha$. Допустим, что для всех $\alpha < \beta < \tau$ это уже доказано. Докажем, что различных Φ_β^R имеется $\leqslant p_\beta$. В самом деле, каждое Φ_β^R определено, если определены все Φ_α^R, $\alpha < \beta$, и указано, какие части порций $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{\Phi}_\alpha^R$ являются при этом отмеченными. Но в силу допущения и того, что $\bar{\bar{\beta}} \leqslant \beta < p_\beta$, всех множеств $\{\tilde{\Phi}_\alpha^R;\ \alpha < \beta\}$ может существовать не более, чем подмножеств мощности $\bar{\bar{\beta}}$ множества всех $\tilde{\Phi}_\alpha^R, \alpha < \beta$, которое имеет мощность $\leqslant p_\beta$, т. е. всех множеств $\{\tilde{\Phi}_\alpha^R;\ \alpha < \beta\}$ имеется не более $p_\beta^{\bar{\bar{\beta}}} = p_\beta$. Фиксируем теперь произвольно $\{\tilde{\Phi}_\alpha^R;\ \alpha < \beta\}$; Φ_β^R зависит тогда только от способа распределения случаев 1), 2), 3) в поведении $\tilde{F}_\beta^R$ относительно пересечений его с различными непустыми $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$; при этом, в силу бикомпактности R и замкнутости в нем всех $\tilde{F}_\alpha^R$, достаточно учитывать распределение случаев 1'), 2'), 3'), определение каждого из которых получится, если как-либо заменить в соответствующем случае 1), 2), 3) выражение $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ на пересечение конечного числа сомножителей последнего пересечения. Таких определений можно составить конечное множество, если β конечно; $\bar{\bar{\beta}}$, если β бесконечно, и в том и в другом случае их будет некоторое количество $\mathfrak{m} < p_\beta$; для каждого из них нас интересуют три возможных случая поведения $\tilde{F}_\beta^R$, следовательно, всего интересующих нас распределений способов поведения $\tilde{F}_\beta^R$ относительно всех $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} \tilde{F}_\alpha^R$ имеется $\leqslant 3^{\mathfrak{m}} \leqslant p_\beta^{\mathfrak{m}} = p_\beta$. Таким образом, всевозможных $\tilde{\Phi}_\beta^R$ имеется $\leqslant p_\beta^2 = p_\beta$, чем доказано, что всевозможных $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ при произвольном R имеется τ. Минимальная содержащая все $\tilde{\Phi}_\alpha^R$ булева алгебра Φ (относительно теоретико-множественных операций сложения и пересечения) имеет мощность τ и, очевидно, содержит произвольную булеву алгебру мощности τ; значит, Φ есть универсальная булева алгебра мощности τ; ей соответствует универсальный бикомпакт C_τ веса τ.

Обратно, если $\overline{\overline{\Phi}} = \tau$, то нетрудно видеть, что $2^{\mathfrak{m}} \leqslant \tau$ при $\mathfrak{m} < \tau$.

При $\tau = \aleph_0$ континуум-гипотеза не используется в этом рассуждении и $C_{\aleph_0}$ есть канторово совершенное множество.

Поступило
27 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Усп. матем. наук, 2, в. 1 (17), 5 (1947). [2] W. Wallman, Ann. of Math., 39, 112 (1938). [3] K. Gödel, Ann. of Math., Studies, No. 3, Princeton (1940); русский пер. А. Маркова, Усп. матем. наук, 3, в 1 (23), 96 (1948). [4] F. Hausdorff, Math. Ann., 65, 494 (1908).