Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. П. АКИЛОВ

О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 VIII 1949)

В работах Л. В. Канторовича ([1,2]) разработан метод решения функциональных уравнений

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где P — операция (нелинейная), переводящая одно пространство типа B X в другое такое же пространство Y.

Пусть имеется некоторое «приближенное» решение уравнения (1) $x_0 \in X$. Исходя из x_0, строится последовательность приближенных решений $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ Именно, после того, как найдено x_n, следующее приближение x_{n+1} ищется из линейного функционального уравнения

$$P'(x_n)(x - x_n) + P(x_n) = 0$$

здесь $P'(x)$ есть производная в смысле Фреше операции P).

Относительно сходимости описанного процесса Л. В. Канторовичем доказана следующая теорема:

Теорема A. *Если выполнены условия:*

1) *существует обратная операция* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *и* $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$;

2) $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \delta_0$;

3) *в окрестности* x_0, *определяемой неравенством* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\delta_0$, *существует* $P''(x)$ *и*

$$\| P''(x) \| \leqslant K; \tag{2}$$

4) $h_0 = B_0 K \delta_0 \leqslant \frac{1}{2}$,

то существует решение x^* *уравнения* (1) *и последовательность приближенных решений* $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *сходится к нему. При этом, если неравенство* (2) *выполняется в сфере*

$$\| x - x_0 \| < \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \delta_0,$$

то решение x^* *единственно в этой сфере.*

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(t, x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

с условиями на границе

$$\Phi_s(\{x_k\}) = \Phi_s(x_0(0), \ldots, x_n(0); x_0(1), \ldots, x_n(1)) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

О функциях $F_s(t, x_0, \ldots, x_n)$ и $\Phi_s(u_0, \ldots, u_n; v_0, \ldots, v_n)$ предполагается, что они имеют частные производные до второго порядка по x_k, u_k, v_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ в некоторой области, причем производные F_s непрерывны по $t \in [0, 1]$.

Вводя подходящим образом выбранные пространства X и Y и операцию P из X в Y, мы можем заменить задачу решения системы (3) с условиями (4) задачей решения функционального уравнения (1).

Применение к уравнению (1) метода Л. В. Канторовича позволяет развить соответствующий метод для решения системы (3) при условиях (4). Пусть $\{x_k^{(0)}(t)\}$ — приближенное решение системы, приближенно удовлетворяющее условиям (4). Для определения следующего приближения получается, согласно этому методу, линейная система

$$\frac{d(x_s - x_s^{(0)})}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k}\right)_0 (x_k - x_k^{(0)}) + F_s(t, x_0^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad s = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

с условиями

$$A_s(\{x_k\}) + B_s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial u_k}\right)_0 x_k^{(0)}(0) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial v_k}\right)_0 x_k^{(0)}(1) - \Phi_s(\{x_k^{(0)}\}), \tag{6}$$

$$A_s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial u_k}\right)_0 x_k(0), \quad B_s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial v_k}\right)_0 x_k(1), \qquad s = 0, 1, \ldots, n$$

(в системе (5) $(\partial F_s / \partial x_k)_0$ означает результат подстановки в $\partial F_s / \partial x_k$ $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$; аналогичный смысл имеют $(\partial \Phi_s / \partial u_k)_0$, $(\partial \Phi_s / \partial v_k)_0$).

Найденное приближение $\{x_k^{(1)}(t)\}$ позволяет подобным же образом отыскать следующее приближение $\{x_k^{(2)}(t)\}$ и последующие приближения, причем, пользуясь некоторой модификацией процесса, также указанной Л. В. Канторовичем [1,2], можно добиться того, что коэффициенты при неизвестных функциях в системе (5), равно как и левые части условий (6), будут одними и теми же при каждом шаге.

Формулируя условия 1) — 4) теоремы А для рассматриваемого случая, находим условия сходимости процесса.

Теорема 1. *Пусть $\{x_{ki}\}_{k, i=0, \ldots, n}$ — совокупность линейно независимых решений однородной системы, соответствующей системе* (5). *Тогда если определитель*

$$\Delta = | A_s(\{x_{ki}\}) + B_s(\{x_{ki}\}) |_{s, i=0, \ldots, n} \neq 0, \tag{7}$$

то существует операция Γ_0 и, если величины B_0, δ_0, K таковы, что $B_0 \delta_0 K \leqslant 1/2$, то решение системы (3), *удовлетворяющее условиям* (4), *существует и единственно в некоторой окрестности начального приближения $\{x_s^{(0)}(t)\}$. При этом последовательность приближенных решений сходится к нему равномерно в* $[0, 1]$.

Описанный метод может быть применен для практического решения систем дифференциальных уравнений, при этом 2—3 шага процесса обычно уже убедительно указывают на сходимость его, так что проверку условий сходимости можно в таких случаях опускать.

Укажем на некоторые теоретические приложения метода.

Пусть правые части системы (3) периодические функции периода 1. Решая систему при условиях

$$x_s(1) - x_s(0) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n,$$

мы получим периодическое его решение.

В частности:

Теорема 2. *Если*

$$| F_s(t, 0, \ldots, 0) | \leqslant \varepsilon, \quad t \in [0, 1], \quad s = 0, 1, \ldots, n,$$

и

$$\Delta = | x_{sk}(1) - x_{sk}(0) |_{s, k=0, 1, \ldots, n} \neq 0,$$

то может быть эффективно указана положительная граница для ε, *при которых система* (3) *имеет периодическое решение.*

Пусть, далее, система (3) имеет периодическое решение с периодом 1 $\{x_s^*(t)\}$. Очевидно, можно считать $x_s^*(t) \equiv 0$. Используя установленную в теореме А единственность решения, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Если определитель*

$$\Delta = | x_{sk}(\tau) - x_{sk}(0) |_{s, k=0, \ldots, n} \neq 0 \quad (\tau - \textit{целое}),$$

то в достаточно малой окрестности $x_s^*(t) = 0$ (*размеры окрестности могут быть эффективно указаны*) *кроме* $x_s^*(t)$ *нет других периодических решений системы* (3) *периода* τ.

Применение метода к системам с бесконечным промежутком для t позволяет доказать некоторые обобщения известных теорем А. М. Ляпунова об устойчивости движения. Точнее говоря, предполагая, что функции F_s имеют производные второго порядка по x_k в некоторой окрестности нуля, непрерывные и равномерно ограниченные для $t \geqslant 0$, и считая, что, как обычно, $F_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$, мы можем высказать теоремы [3,4]:

Теорема 4. *Пусть существуют*

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k} \right)_0 = a_{sk} \quad (s, k = 0, 1, \ldots, n)$$

и вещественные части всех корней уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

отрицательны. Тогда невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема 5. *Пусть*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k} \right)_0 - \underline{\lim_{t \to \infty}} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k} \right)_0 = \bar{a}_{sk} - \underline{a}_{sk} \leqslant \varepsilon \quad \textit{и} \quad a_{sk} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{sk} + \underline{a}_{sk}).$$

Если вещественные части всех корней уравнения (8) *отрицательны, то при достаточно малом* ε (*границы допустимых* ε *могут быть и здесь эффективно указаны*) *невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Оба предложения получаются из теоремы А, если в качестве пространства X принять совокупность $(n + 1)$-членных комплексов непрерывно дифференцируемых функций $(x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$, удовлетворяющих условию

$$| x_s(t) | \leqslant A_s e^{-\alpha t}, \quad | x_s'(t) | \leqslant B_s e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\alpha > 0$, A_s и B_s — некоторые постоянные.

В качестве Y в этом случае надлежит взять совокупность

$$y = (z_0(t), z_1(t), \ldots, z_n(t); \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n),$$

где $z_s(t)$ — непрерывные при $t \geqslant 0$ функции, причем

$$|z_s(t)| \leqslant C_s e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n,$$

а $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ — вещественные числа.

Замечание 1. Теорема А. М. Ляпунова о правильных системах также без труда получается с помощью изложенного метода.

Замечание 2. Метод может быть применен очевидным образом также к квази-линейным системам

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=0}^{n} a_{sk} x_k + f_s(t) + \varepsilon G_s(t, x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Замечание 3. Некоторые из рассмотренных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым ([5]) уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

также поддаются изучению посредством предложенного метода, так как последовательные приближения по этому методу сходятся равномерно на бесконечной полупрямой $t \geqslant 0$. В то же время наш метод для применений значительно удобнее метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, который, кстати сказать, не является, по свидетельству авторов его, сходящимся.

Поступило
18 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, ДАН, 59, № 7 (1948). [2] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, в. 6, 89 (1948). [3] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935. [4] Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, 1946. [5] Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, 1937.