Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 1

ФИЗИКА

И. Я. БАРИТ и М. И. ПОДГОРЕЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НАБЛЮДЕНИЕМ ШИРОКИХ АТМОСФЕРНЫХ ЛИВНЕЙ

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 23 VI 1949)

В связи с экспериментальными работами по корреляции между толчками, вызываемыми широкими атмосферными ливнями в двух или нескольких ионизационных камерах ([1], [2]), представляет интерес теоретическое рассмотрение, основанное на представлении о том, что толчки вызываются ливнями, описываемыми классической каскадной теорией.

Цель настоящей работы состоит в получении некоторых контрольных соотношений, которые должны выполняться, если ливни представляют собой поток релятивистских частиц, пространственное распределение которых подчиняется закону Пуассона. Экспериментальная проверка этих соотношений может быть использована для установления степени законности физических предположений, положенных в основу вывода. Можно, например, проверить, действительно ли неравенство толчков в двух ионизационных камерах ([1]) может быть объяснено только наличием в составе ливней некоторого числа сильно ионизующих частиц. В последнем случае соотношения, выводимые ниже, не должны выполняться, если только давление в камере не настолько велико, чтобы ионизацией, создаваемой сильно ионизующими частицами, можно было пренебречь.

Величину ионизационного толчка мы будем обозначать через x, плотность ливня через ρ. Величина толчка, создаваемого одной релятивистской частицей, считается равной Al, где l — длина пути частицы внутри камеры.

В предыдущей работе ([3]) было показано, что при фиксированной плотности ливня ρ

$$x = \beta\rho, \tag{1}$$

$$x^2 = \beta^2\rho^2 + \alpha\rho, \tag{2}$$

где α и β — некоторые постоянные, зависящие от размеров камеры, причем β равна произведению A на объем камеры.

Для сферической камеры радиуса R

$$\alpha = 2\pi A^2 R^4, \quad \beta = {}^4/_3\,\pi A R^3.$$

Вероятность того, что плотность ливня находится в интервале от ρ до $\rho + d\rho$, обозначим $f(\rho)\,d\rho$. Заметим, что, в общем случае, функция $f(\rho)$ учитывает также вероятность срабатывания системы управления (счетчиков и т. д.).

Для получения $\bar{x}$ и $\bar{x^2}$ нужно (1) и (2) умножить на $f(\rho)$ и проинтегрировать, что дает

$$\bar{x} = \beta \int_0^\infty \rho f(\rho)\, d\rho \tag{1'}$$

и

$$\overline{x^2} = \beta^2 \int_0^\infty \rho^2 f(\rho)\, d\rho + \alpha \int_0^\infty \rho f(\rho)\, d\rho. \tag{2'}$$

Если установка состоит из двух одинаковых камер, величины толчков в которых мы обозначим через x_1 и x_2, то аналогично получим

$$\overline{x_1 x_2} = \beta^2 \int_0^\infty \rho^2 f(\rho)\, d\rho. \tag{3}$$

Сопоставление (1'), (2') и (3) дает искомое контрольное соотношение

$$\overline{x^2} = \overline{x_1 x_2} + \frac{\alpha}{\beta}\bar{x}, \tag{4}$$

экспериментальная проверка которого позволяет оценить роль сильно ионизующих частиц, возможной структуры ливней и т. д.

Соотношение (4) относится к средним величинам, которые экспериментально могут быть определены только с некоторой степенью точности, зависящей от полного числа наблюденных толчков N.

Для определения теоретически допустимых отклонений от (4) заметим, что распределение величины $\sum\limits_1^N x^i / N$ (i—номер толчка) описывается при большом N законом Гаусса с дисперсией $D = \frac{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}{N}$, где $\overline{x^2}$ и $\bar{x}$ в первом приближении можно считать совпадающими с $\frac{\Sigma x^i_+}{N}$ и $\frac{\Sigma (x^i)^2}{N}$.

Совершенно аналогично можно получить, что дисперсия величины $\frac{\Sigma (x^i)^2}{N}$ равна $\frac{\overline{x^4} - (\overline{x^2})^2}{N}$, а дисперсия величины $\frac{\Sigma x_1^i x_2^i}{N}$ равна $\frac{\overline{(x_1 x_2)^2} - (\overline{x_1 x_2})^2}{N}$. Поэтому экспериментально измеренная величина $\overline{x^2} - \overline{x_1 x_2} - \frac{\alpha}{\beta}\bar{x}$ должна быть равна нулю с точностью до

$$\sqrt{\frac{\overline{x^4} - (\overline{x^2})^2 + \overline{(x_1 x_2)^2} - (\overline{x_1 x_2})^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\overline{x^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\bar{x})^2}{N}}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о корреляции толчков в двух камерах с другой точки зрения. Пусть величина толчка в одной камере равна x_1. Каков должен быть закон распределения $u(x_2/x_1)$ толчков в другой камере?

В ([3]) было показано, что при фиксированной плотности ливня ρ распределение толчков в одной камере $u(x)$ выражается законом Гаусса

$$u(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} \exp\left\{-\frac{(x - \beta\rho)^2}{2\alpha\rho}\right\} dx, \tag{5}$$

причем (5) справедливо, если среднее число частиц, проходящих через камеру велико, т. е. при

$$\pi R^2 \rho \gg 1. \tag{5'}$$

Вероятность того, что в первой камере будет толчок в интервале dx_1, а во второй — в интервале dx_2, мы обозначим $u(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$. Очевидно,

$$u(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi\alpha\rho}\exp\left\{\frac{(x_1-\beta\rho)^2+(x_2-\beta\rho)^2}{2\alpha\rho}\right\}dx_1 dx_2.$$

Учет спектра плотностей даст

$$u(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = dx_1\,dx_2\int_0^\infty \frac{f(\rho)}{2\pi\alpha\rho}\exp\left\{-\frac{(x_1-\beta\rho)^2+(x_2-\beta\rho)^2}{2\alpha\rho}\right\}d\rho. \qquad (5'')$$

Деление (5″) на вероятность того, что толчок в первой камере лежит в интервале dx_1, безотносительно к величине толчка во второй камере, дает нам, очевидно, искомую величину $u(x_2/x_1)$. Поэтому

$$u(x_2/x_1) \sim \int_0^\infty \frac{f(\rho)}{2\pi\alpha\rho}\exp\left\{-\frac{(x_1-\beta\rho)^2+(x_2-\beta\rho)^2}{2\alpha\rho}\right\}d\rho, \qquad (6)$$

где опущенный нами коэффициент пропорциональности не зависит от x_2.

Если $x_2 \approx x_1$, то показатель экспоненты имеет острый максимум при $\rho \approx \frac{x_1}{\beta}$, ширина которого $\Delta \approx \sqrt{\frac{2\alpha x_1}{\beta^3}}$.

Предположим, что предэкспоненциальная функция изменяется в этой области достаточно медленно, т. е. $\frac{f'}{f}\Delta \ll 1$ (легко показать, что это условие обычно равносильно (5′)). Тогда в интересующей нас области $(x_2 - x_1) \leqslant \sqrt{\frac{2\alpha x_1}{\beta}}$ можно записать

$$u(x_2/x_1) \sim \frac{f(x_1/\beta)}{2\pi\alpha\sqrt{x_1/\beta}}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x_1-\beta\rho)^2-(x_2-\beta\rho)^2}{2\alpha\rho}\right\}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}.$$

Используя известное соотношение

$$\int_0^\infty e^{-(p^2\rho+q^2/\rho)}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{\sqrt{\pi}}{p}e^{-2pq}, \qquad (7)$$

получаем

$$u(x_2/x_1) \sim \exp\left\{\frac{\beta}{\alpha}\left(x_1+x_2-\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)}\right)\right\}. \qquad (8)$$

Для малых значений $\zeta = x_2 - x_1$ (9) переходит в

$$u(\zeta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\pi\alpha x_1}}\,e^{-\beta\zeta^2/4\alpha x_1}, \qquad (8')$$

т. е. в закон Гаусса с дисперсией $D = 2\alpha x_1/\beta$ и средним $\bar{\zeta} = 0$ (или $\bar{x}_2 = x_1$).

Для относительной флуктуации получаем

$$\delta(x_2/x_1) = \frac{k}{\sqrt{N}}, \qquad (9)$$

где N — среднее число частиц, вызывающих толчок x_1, а k — множитель порядка единицы, зависящий от типа камеры (для сферической камеры $k = {}^3/_2$.

Так как точное значение N обычно неизвестно (его определение зависит от точности градуировки камеры), то можно измерять $\delta(x_2 / x_1)$ для двух разных значений x_1, x_1' и x_1'', так как отношение

$$\frac{\delta(x_2 / x_1')}{\delta(x_2 / x_1'')} = \frac{\sqrt{x_1''}}{\sqrt{x_1'}} \tag{10}$$

выражается только через измеряемые величины.

Рассмотрим теперь более общую задачу, относящуюся к нескольким, для простоты одинаковым, камерам. Пусть в $n-1$ камерах зафиксированы толчки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Каков будет закон распределения $u(x_n / x_1, \ldots, x_{n-1})$ толчков в n-й камере?

Путем совершенно аналогичных рассуждений получим:

$$u(x_n / x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt{\frac{(n-1)\beta}{2\pi n \alpha x_0}} \exp\left\{-\frac{(n-1)\beta(x-x_0)^2}{2n\alpha x_0}\right\},$$

где

$$x_0 = \sqrt{\sum_1^{n-1} x_i^2 / n-1}. \tag{11}$$

Соотношения (8) — (11) также могут рассматриваться как контрольные соотношения, в смысле, указанном в начале статьи.

Мы предполагали, что электроны распределены в пространстве в соответствии с законом Пуассона. Заранее ясно, что из-за генетической связи между частицами ливня закон Пуассона строго выполняться не может. Вместе с тем, возможно указать качественный критерий, выполнение которого влечет за собой практическую применимость закона Пуассона.

Рассмотрим некоторую высоту над установкой H_0 такую, что электроны, рожденные выше ее, приходят к установке, испытав кулоновское рассеяние с радиусом рассеяния много больше размеров установки r_0.

Все электроны этой группы по своему действию на установку могут считаться независимыми. Так как электроны, образованные ниже H_0, не могут считаться независимыми, то для всего ливня в целом закон Пуассона будет практически выполняться тогда, когда число электронов второй группы будет в несколько раз меньше полного числа электронов в ливне.

Отсюда следует, что закон Пуассона выполнен тем лучше, чем меньше r_0.

В принципе конечность радиусов ливней также может привести к нарушению закона Пуассона. Очевидно, что роль этого фактора также уменьшается с уменьшением r_0 и им можно пренебречь, коль скоро размеры установки становятся много меньше радиусов ливней.

Отметим, что в расчетах, связанных с видом $u(x_n / x_1, \ldots, x_{n-1})$ под r_0 следует понимать не расстояния между управляющими счетчиками, а расстояния между камерами.

Автор выражает благодарность Н. А. Добротину и Г. Т. Зацепину за полезную дискуссию.

Физический институт
Академии наук СССР

Поступило
13 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Разоренов и А. К. Князев, ЖЭТФ, 19, 283 (1949). [2] Л. Разоренов и А. Князев, ДАН, 60, 1531 (1948). [3] М. Подгорецкий, ДАН, 67, № 6 (1949).