

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. С. УФЛЯНД

**КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПРОФИЛЕМ,
ОГРАНИЧЕННЫМ ДУГАМИ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ
ОКРУЖНОСТЕЙ**

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 6 VII 1949)

Рассмотрим упругий призматический стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 1. Дуги окружностей, составляющих его контур, являются координатными линиями $\beta = \text{const}$ ($-\pi < \beta < +\pi$) системы биполярных координат (α, β) , связанных с прямоугольными координатами зависимостью:

$$x + iy = ai \operatorname{th} \frac{\alpha + i\beta}{2}.$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (1)$$

Задача кручения сводится к решению уравнения:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \right) = -2,$$

$$h^2 = \frac{a^2}{ds^2} (da^2 - d\beta^2) = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2 \quad (2)$$

при граничных условиях:

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1) = \varphi(\alpha, \beta_2) = 0. \quad (3)$$

Полагая $\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) = (x/a)^2$, будем иметь для функции $f(\alpha, \beta)$ уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 0, \quad (4)$$

интеграл которого, ввиду четности по переменной α , ищем в виде:

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} [C(z) \operatorname{ch} \beta z + S(z) \operatorname{sh} \beta z] \cos \alpha z dz.$$

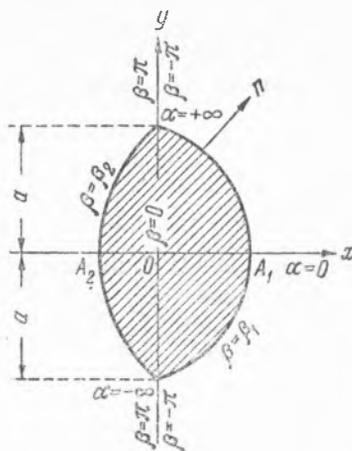


Рис. 1

Воспользовавшись разложением:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}\right)^2 = \int_0^{\infty} F(\beta, z) \cos \alpha z dz,$$

$$F(\beta, z) = \frac{2}{\operatorname{sh} \pi z} (z \operatorname{ch} \beta z - \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{sh} \beta z)$$

и условием (3), получаем для $C(z)$ и $S(z)$ систему уравнений:

$$\begin{aligned} C(z) \operatorname{ch} \beta_1 z + S(z) \operatorname{sh} \beta_1 z &= F(\beta_1, z), \\ C(z) \operatorname{ch} \beta_2 z + S(z) \operatorname{sh} \beta_2 z &= F(\beta_2, z). \end{aligned} \quad (6)$$

Определяя отсюда $C(z)$ и $S(z)$, получим для функции $\varphi(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta) &= \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \beta_2 z \cdot \operatorname{sh} (\beta_1 - \beta) z}{\operatorname{sh} \pi z \cdot \operatorname{sh} (\beta_2 - \beta_1) z} \cos \alpha z dz - \\ &- 2 \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \beta_1 z \cdot \operatorname{sh} (\beta_2 - \beta) z}{\operatorname{sh} \pi z \cdot \operatorname{sh} (\beta_2 - \beta_1) z} \cos \alpha z dz, \end{aligned} \quad (7)$$

что и дает точное решение поставленной задачи.

Жесткость стержня при кручении $c = M/\theta$, где M — внешний крутящий момент, а θ — угол закручивания на единицу длины стержня, вычисляется с помощью соотношения (1):

$$M = 2a^4 \mu \theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\beta}{h^2} \quad (\mu \text{ — модуль сдвига}).$$

После выполнения интегрирования по α и β будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu \alpha^4} &= \left\{ \frac{1}{2 \sin^4 \beta} [\beta + \sin \beta \cos \beta (2 \cos^2 \beta - 3)] \right\} \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} - \\ &- 4\pi (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} \beta_1 z \cdot \operatorname{sh} \beta_2 z}{\operatorname{sh}^2 \pi z \cdot \operatorname{sh} (\beta_2 - \beta_1) z} dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Касательное напряжение, действующее по площадке, нормальной к линии $\beta = \operatorname{const}$, будет:

$$\frac{\tau_{\alpha z}}{a \mu \theta} = -a \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \pm h \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$$

(+ при $\beta < 0$, — при $\beta > 0$), или, на основании (7):

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) &= \pm \frac{\tau_{\alpha z}}{a \mu \theta h} = 2 \operatorname{ctg} \beta_1 \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} \beta_1 z \cdot \operatorname{ch} (\beta_2 - \beta) z}{\operatorname{sh} \pi z \cdot \operatorname{sh} (\beta_2 - \beta_1) z} \cos \alpha z dz - \\ &- 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh} \beta_2 z \cdot \operatorname{ch} (\beta_1 - \beta) z}{\operatorname{sh} \pi z \cdot \operatorname{sh} (\beta_2 - \beta_1) z} \cos \alpha z dz - \frac{\operatorname{ch} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Максимальные касательные напряжения τ_1 и τ_2 достигаются в точках A_1 и A_2 соответственно и даются формулами:

$$\frac{\tau_i}{\mu a \theta} = \pm (1 + \cos \beta_i) \Phi(0, \beta_i), \quad (10)$$

$(i = 1, 2; + \text{ для } i=1, - \text{ для } i=2).$

Обратимся к некоторым практически важным частным случаям.

1°. При $\beta_1 = 0$ получаем круглый стержень, срезанный плоскостью, параллельной оси (рис. 2). Полагая $\beta_2 = \gamma$ ($0 < \gamma < \pi$), вводя коэффициенты $k = c : \mu R^4$, $x_0 = \tau_1 : \mu R \theta$, $x_\gamma = \tau_2 : \mu R \theta$ и пользуясь зависимостью $a = R \sin \gamma$, получаем из (8) и (10):

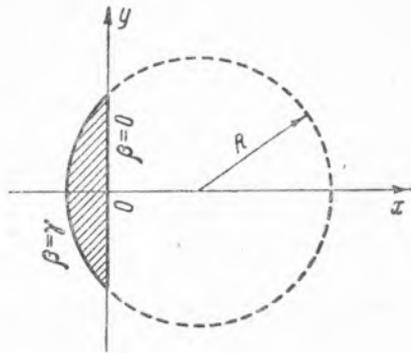


Рис. 2

$$k = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12} \sin 2\gamma (2 \sin^2 \gamma - 3) - 2\pi J(\gamma), \quad J(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{z^3 \operatorname{cth} \gamma z}{\operatorname{sh}^2 \pi z} dz,$$

$$x_0 = 4 \sin \gamma P(\gamma) - \cos \gamma, \quad P(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{z^2 \operatorname{cth} \gamma z}{\operatorname{sh} \pi z} dz, \quad (11)$$

$$x_\gamma = 1 - 2 \sin \gamma (1 + \cos \gamma) Q(\gamma), \quad Q(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{z^2}{\operatorname{sh} \pi z \cdot \operatorname{sh} \gamma} dz.$$

Для полукруглого сечения ($\gamma = \pi/2$) все квадратуры выполняются ($J = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{16}$, $P = \frac{2}{3\pi}$, $Q = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$) и соответствующие значения $k = \pi/2 - 4/\pi$, $x_0 = 8/3\pi$, $x_\gamma = 2 - 4/\pi$ совпадают с результатами, полученными при помощи полярных координат (2) или бесселевых функций (3). В предельном случае $\gamma = \pi$ (полный круг) имеем $k = \pi/2$, $x_0 = x_\gamma = 1$, как и должно быть.

2°. Если $\beta_2 = -\beta_1 = \gamma$, то рассматриваемое сечение переходит в симметричную круговую „луночку“. Из (8) и (10) имеем:

$$k^* = \frac{c}{\mu a^4} = \frac{1}{\sin^4 \gamma} [\gamma + \sin \gamma \cos \gamma (2 \cos^2 \gamma - 3) + 8\pi \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma L(\gamma)],$$

$$L(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{th} \gamma z}{\operatorname{sh}^2 \pi z} dz, \quad (12)$$

$$x^* = \frac{\tau_1}{\mu a \theta} = \frac{\tau_2}{\mu a \theta} = \frac{1}{\sin \gamma} - 2 \operatorname{ctg} \gamma (1 + \cos \gamma) T(\gamma),$$

$$T(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{z}{\operatorname{sh} \pi z \cdot \operatorname{ch} \gamma z} dz.$$

Для круглого сечения ($\gamma = \pi/2$) получаем $k^* = \pi/2$ и $x^* = 1$. При $\gamma > \pi/2$ в вершинах „луночки“ получаются бесконечно большие напряжения.

В табл. 1 даны коэффициенты k , x_0 , x_γ , k^* , x^* для некоторых значений γ .

Таблица 1

| γ | k | x_0 | x_γ | k^* | x^* |
|----------|--------|-------|------------|--------|-------|
| $\pi/6$ | 0,0027 | 0,130 | 0,123 | 0,0421 | 0,467 |
| $\pi/3$ | 0,0375 | 0,444 | 0,407 | 0,354 | 1,796 |
| $\pi/2$ | 0,297 | 0,849 | 0,726 | 1,57 | 1 |
| $2\pi/3$ | 0,931 | 1,15 | 0,920 | — | — |
| $5\pi/6$ | 1,39 | 1,21 | 0,991 | — | — |
| π | 1,57 | 1 | 1 | — | — |

3°. При $\beta_2 = 2\beta_1$ продолжение дуги одной окружности проходит через центр другой окружности (рис. 3). В этом случае квадратуры в выражениях (8) и (9) выполняются. Максимальное напряжение будет на поверхности выреза ($\beta = \beta_1$) в точке A:

$$\tau_{\max} : \mu a \theta = \sin \beta_1 : [\cos \beta (1 + \cos \beta_1)].$$

Так как

$$\frac{a \sin \beta_1}{\cos \beta_1 (1 + \cos \beta_1)} = 2R_2 - R_1,$$

то

$$\tau_{\max} = \mu \theta (2R_2 - R_1). \quad (13)$$

Отсюда видно, что в случае малого выреза ($R_1 \ll 2R_2$) $\tau_{\max} \approx 2\mu\theta R_2$ вдвое больше, чем максимальное напряжение для круглого сечения.

Этот результат был получен Вебером (4) другим способом.

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
2 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1937, стр. 259. ² Saint-Venant, C. R., 87, 849 (1878). ³ А. Н. Динник, Изв. Донского политехн. ин-та, Новочеркасск, 1, 1912, стр. 309. ⁴ С. Weber, Forschungsarbeiten, No. 249 (1921).