Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ШАХОВА

РАСПОЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 7 VII 1949)

Рассматриваемые дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

где на функцию f не наложено никаких условий, кроме непрерывности относительно переменных x и y в некоторой области плоскости XOY.

1. Классические результаты: единственность. Назовем локоном непрерывных линий совокупность непрерывных кривых, не имеющих попарно общей точки и покрывающих всю область, без пропуска какой-либо ее точки. Каждая кривая локона рассматривается как открытая в обе стороны, т. е. как не содержащая замыкающих ее концевых точек; таким образом, обе граничные точки кривой к ней не принадлежат. Если все кривые локона примыкают к одной и той же граничной точке M, мы назовем локон связанным в точке M; точка M, связывающая локон, не принадлежит области, но лишь ее границе.

Классический результат тот, когда непрерывная функция $f(x, y)$ удовлетворяет внутри области известному условию Коши — Липшица:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < K(y_2 - y_1), \tag{2}$$

где K — численная константа. В этом случае совокупность всех интегральных линий дифференциального уравнения (1) в рассматриваемой области образует локон, т. е. через всякую фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ области проходит одна и только одна интегральная кривая. Короче говоря, здесь имеем единственность.

Впоследствии этот классический результат был значительно расширен Осгудом [1], показавшим, что сильное ограничительное условие Коши — Липшица можно заменить более слабым

$$|f(x,y_2) - f(x, y_1)| < K\,|y_2 - y_1| \log\frac{1}{|y_2 - y_1|} \cdots \log\,\log \cdots \log\frac{1}{|y_2 - y_1|}, \tag{3}$$

где все множители суть последовательные итерированные логарифмы, число которых может быть сколь угодно велико. В этом случае мы продолжаем иметь единственность.

С другой стороны, Тамаркин [2] показал, что, хотя мы еще сохраняем, следуя Осгуду, единственность соблюдением неравенства

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \psi(|y_2 - y_1|), \tag{4}$$

где положительная непрерывная функция $\psi(z)$ монотонна на отрезке $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, и, уничтожаясь в $z = 0$, делает интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{dz}{\psi(z)} \tag{5}$$

расходящимся, однако при сходимости этого интеграла (5), несмотря на соблюдение неравенства (4), всегда наблюдаются уже случаи множественности, а именно, для надлежаще подобранной функции $f(x, y)$ наличие двух интегральных кривых, проходящих через начало координат $x = 0$, $y = 0$.

2. Экстремали Пеано. Освободившись от всех ограничительных условий, Пеано [3] установил для всякой непрерывной $f(x, y)$ существование четырех экстремальных, верхних и нижних, интегральных линий, проходящих через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ области: двух правосторонних и двух левосторонних. Всякая интегральная линия, проходящая через M_0, должна содержаться между (в широком смысле) ними. Единственность характеризуется совпадением верхних экстремалей с нижними. Так как при замене x на $-x$ и y на $-y$ левые экстремали переходят в правые, а нижние в верхние, то при изучении расположения экстремалей достаточно ограничиться семейством правых верхних экстремалей.

Две какие-нибудь правые верхние экстремали E и E' не могут пересекаться (в точном смысле) между собою, ибо, если они имеют какую-нибудь общую точку $M_1(x_1, y_1)$, то в дальнейшем своем течении, при возрастающем x, $x > x_1$, они должны всюду уже сливаться. Правая верхняя экстремаль может не иметь левого конца, но может и обладать им. Примером первого случая является положительная часть оси OX в семействе парабол $y = cx^2$, $-1 \leqslant c \leqslant +1$; примером второго случая служит в семействе парабол $y = c(x + c)^2$, $0 \leqslant c \leqslant +1$, положительная часть оси OX с присоединенным к ней началом координат $x = 0$.

3. Дифференциальные уравнения акад. М. А. Лаврентьева. Дальнейший прогресс в теории уравнения (1) достигнут М. А. Лаврентьевым, нашедшим класс непрерывных функций $f(x, y)$, для которых все четыре экстремали Пеано строго различны в каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ области. Таким образом, для всякой такой $f(x, y)$ всюду в области имеется множественность. До этой работы [4] самое существование подобного рода дифференциальных уравнений казалось невозможным. В дальнейшем, ради краткости, такие функции $f(x, y)$ и соответствующие им уравнения (1) будем называть L-функциями и L-уравнениями.

L-уравнения до настоящего времени еще совершенно не изучены, несмотря на их действительно парадоксальные свойства. Причиной этого является не столько политомический процесс построения L-функций*, сколько простое отсутствие глубоких гипотез и остро

* На самом деле, этот процесс может быть сильно упрощен, ибо сохранение первоначально употребляемых для сказанного построения пересекающихся (с прикосновением) интегральных кривых не является необходимым. Для построения L-уравнения достаточно использовать лишь дихотомический процесс, вычерчивая помощью интегральных линий фигуру дерева с одним стволом и с непересекающимися между собою ветвями, снабженными лишь точками бифуркации и растущими в сторону монотонного изменения переменного x.

поставленных проблем. Среди парадоксальных свойств L-уравнений мы укажем на следующее:

Теорема. *Для L-уравнения имеется такая строго фиксированная счетная последовательность его интегральных кривых $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, ..., $y = \varphi_n(x)$, ..., из дуг которых можно составить интегральную кривую $y = \Phi(x)$, проходящую через любую наперед заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ области.*

Такую строго фиксированную последовательность $y = \varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, решений L-уравнения мы называем базой L-уравнения. База L-уравнения есть счетная и, значит, пересекается всякой параллелью оси OY лишь в счетном множестве точек. И, однако, из дуг кривых этой базы, взятых в счетном числе, можно составить решение L-уравнения, проходящее через любую заранее фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ области, причем это составление осуществляется без какого-либо переноса и вращения, следовательно, без перемещения вырезанных из базы дуг, но путем простого их присоединения одна к другой, т. е. путем только процесса склеивания.

Никакое дифференциальное уравнение (1), удовлетворяющее условиям единственности, не может представить такого феномена, так как оно не может обладать счетной базой, ибо совокупность всех его интегральных линий является локоном и, значит, его база должна иметь мощность континуума, а не быть счетной.

4. Гипотезы и проблемы. Мы видели, что в случае L-уравнения, соединяя надлежащим образом дуги счетной базы $y = \varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, можно получить решение $y = \Phi(x)$, проходящее через любую фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ области. Но мы не знаем, можем ли мы таким же образом получить экстремаль Пеано в точке M_0. Остается также неизвестным, можно ли, склеивая дуги счетной базы, получить всякое решение $Y(x)$ L-уравнения, проходящее через заданную точку M_0.

Мы не знаем также, можно ли, отбрасывая часть интегральных кривых L-уравнения, получить из оставшихся локон. Иначе говоря, допускает ли L-уравнение какой-либо локон, составленный из его интегральных кривых? Здесь, повидимому, следует ожидать отрицательного ответа.

Проблема локона представляет явные трудности не только для одних L-уравнений. Можно думать, что никакое дифференциальное уравнение (1) не может допускать двух различных локонов его интегральных кривых, т. е. таких, чтобы всякая кривая одного локона пересекалась в одной и только в одной точке с каждою кривою другого локона. Можно думать, что уравнение (1) или не допускает никакого локона его интегральных кривых, или может допускать только один, и можно думать, что в этом последнем случае мы имеем единственность почти всюду, т. е. для всех начальных точек $M_0(x_0, y_0)$, кроме множества площади нуль. Можно думать, что начальные точки M_0, допускающие связанный ими локон интегральных кривых, могут иметься лишь во множестве площади нуль, и не более.

С этим вопросом соединяется проблема о наиболее предпочтительных интегральных линиях, проходящих через M_0, и о числе этих линий. Когда такая линия имеется только одна, тогда заново ставится проблема единственности, но теперь уже в более глубоком смысле. Такой наиболее предпочтительной интегральной линией l, проходящей через M_0, может, например, оказаться такая, что всякая другая интегральная линия l^*, проходящая через M_0, обязательно должна содержать дугу линии l, примыкающую к точке M_0.

В этом круге идей нисколько не очевидно, что L-уравнение лишено точек единственности или что они не могут быть почти всеми точками области, кроме, следовательно, множества площади нуль. Впрочем, более правдоподобно, что для L-уравнений почти во всякой точке M_0 области имеется две предпочтительные интегральные линии, причем они могут и не оказаться экстремалями Пеано.

Наконец, остается невыясненным вопрос, имеются ли среди L-функций $f(x, y)$ такие, для которых конечное уравнение $f(x, y)=k$, где k — константа, всегда дает только однозначную непрерывную линию на плоскости XOY, какова бы ни была допустимая численная величина этой константы.

Поступило
12 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. F. Osgood, Monatsh. Math. und Phys., **9**, 343 (1898). [2] J. Tamarkine, Math. Zs., **16**, 207 (1923). [3] G. Peano, Math. Ann., **37**, 482 (1890); G. Mie, Math. Ann., **43**, 533 (1893). [4] M. Lavrentieff, Math. Zs., **23**, 197 (1925).