Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

В. Ф. НИКОЛАЕВ

ОБ ОПЕРАЦИЯХ, ОТНОСЯЩИХ ФУНКЦИЯМ ПОЛИНОМЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 VII 1949)

В нижеследующем $\tau_n(\theta)$ означает произвольный тригонометрический полином порядка n:

$$\tau_n(\theta)=\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\equiv\frac{r_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}r_k\sin(k\theta+\gamma_k),$$

а $U_n^{(m)}(f)=U_n^{(m)}(\theta,f)$ — линейную операцию из $\breve{C}(0,2\pi)$ в $\breve{C}(0,2\pi)$ (пространство непрерывных периодических функций), сохраняющую $\tau_n(\theta)$ и переводящую остальные $f(\theta)\in\breve{C}(0,2\pi)$ в $\tau_{n+m}(\theta)$.

1. *Каковы бы ни были коэффициенты тригонометрического полинома $T(\theta)$ вида*

$$T(\theta)=\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(m+k)\theta+b_k\sin(m+k)\theta\equiv$$
$$\equiv\frac{r_0}{2}\sum_{k=1}^{n}r_k\sin(\overline{m+k}\theta+\gamma_k),$$

имеет место неравенство

$$\|U_n^{(m)}\|\geqslant\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|}{2\|T\|_{\breve{C}}}. \tag{1}$$

Для доказательства рассмотрим тригонометрические полиномы:

$$\psi(\theta)=\frac{1}{2A}[r_n\cos(\theta-\gamma_n)+r_{n-1}\cos(2\theta-\gamma_{n-1})+\cdots+r_1\cos(n\theta-\gamma_1)],$$

$$\chi(\theta)=-\frac{1}{2A}\{-r_0\sin(n+m+1)\theta+r_1\cos[(n+2m+2)\theta+\gamma_1]+\cdots$$
$$\cdots+r_n\cos[(2n+2m+1)\theta+\gamma_n]\},$$

где $A=\|T\|_{\breve{C}}$.

Нетрудно проверить, что

$$\varphi(\theta)\equiv\psi(\theta)+\chi(\theta)=\frac{1}{A}\sin(n+m+1)\theta\,T(\theta),$$

так что $\|\varphi\|_{\widetilde{C}} \leqslant 1$. Для произвольного α имеем:

$$\varphi(\theta-\alpha)=\psi(\theta-\alpha)+\chi(\theta-\alpha)=$$

$$=\psi(\theta-\alpha)+\sum_{\nu=n+m+1}^{2n+2m+1} p_\nu(\theta)\cos\nu\alpha+q_\nu(\theta)\sin\nu\alpha,$$

где $p_\nu(\theta)$ и $q_\nu(\theta)$ — тригонометрические полиномы порядка $> n+m$ (или $\equiv 0$). Следовательно,

$$U_n^{(m)}(\theta;\varphi(\theta-\alpha))=\psi(\theta-\alpha)+\sum_{\nu=n+m+1}^{2n+2m+1} P_\nu(\theta)\cos\nu\alpha+Q_\nu(\theta)\sin\nu\alpha,$$

где $P_\nu(\theta)$ и $Q_\nu(\theta)$ — тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n+m$ (или $\equiv 0$).

Положим $\theta=\alpha$:

$$U_n^{(m)}(\alpha;\varphi(\theta-\alpha))=\psi(0)+\sum_{\nu=n+m+1}^{2n+2m+1} P_\nu(\alpha)\cos\nu\alpha+Q_\nu(\alpha)\sin\nu\alpha=\psi(0)+S(\alpha),$$

где $S(\alpha)$ — тригонометрический полином без свободного члена. Следовательно, $S(\alpha')=0$ при некотором $\alpha=\alpha'$ из $[0,2\pi]$, так что

$$U_n^{(m)}(\alpha';\varphi(\theta-\alpha'))=\psi(0).$$

Но, как нетрудно видеть, $|U_n^{(m)}(\alpha';\varphi(\theta-\alpha'))|\leqslant\|U_n\|\cdot 1$. Таким образом, $|\psi(0)|\leqslant\|U_n^{(m)}\|$, что и доказывает (1).

2. Для многих примеров последовательности операций U_n^m известно, что при $m=O(n)$ нормы $\|U_n^{(m)}\|$ оказываются равномерно ограниченными. Из неравенства же (1) следует:

Теорема. *Если $m=o(n)$ $\left(\text{даже, если } \varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0\right)$, то множество норм $\|U_n^{(m)}\|$ будет неограничено.*

Действительно, возьмем полином $T(\theta)$ в виде:

$$T(\theta)=\frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}+\cdots+\frac{\sin(m+n)\theta}{m+n}.$$

Тогда $\|T\|_{\widetilde{C}}\leqslant K$ (постоянная) при любых m и n, а

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m+k}>\log\frac{m+n}{m+1},$$

так что (1) примет вид:

$$\|U_n^{(m)}\|>\frac{1}{2K}\log\frac{m+n}{m+1}. \tag{2}$$

Замечание 1. При $m = 0$ из (2) получается теорема Харшиладзе — Лозинского ([1]).

Замечание 2. Так как $\psi(\theta)$ и $\chi(\theta)$ можно взять в виде косинус-полиномов, то оценка (2) и теорема получатся и для операции $U_n^{(m)}(f)$ (из C в C), сохраняющей обыкновенные полиномы степени n и переводящей остальные функции $\in C$ в обыкновенные полиномы степени $n+m$ ([2]).

3. Если взять в (1) $m=0$ и $U_n^{(0)}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(\theta - t) f(t)\,dt$, так что $\| U_n^{(0)} \| = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_n(t)|\,dt = L_n$, то получится оценка для максимума $|\tau_n(\theta)|$:

$$\|\tau_n\|_{\overline{C}} \geqslant \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right|}{2L_n}. \tag{3}$$

Из (3) следует:

а) Для равномерной ограниченности частных сумм тригонометрического ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$ необходимо, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ была порядка не выше $\log n$.

б) Если коэффициенты b_k заданы, то, как бы ни изменять a_k, максимум $|\tau_n(\theta)|$ не может быть сделан меньше $\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right|}{2L_n}$.

Поступило
2 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Лозинский, ДАН, 61, № 2 (1948). [2] В. Ф. Николаев, О проблеме интерполирования, Диссертация, 1948.