Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Я. ВЕРЧЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВИДА $z=w(x, y)$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1949)

Здесь изучаются произвольные непрерывные поверхности вида $z=w(x,y)$. На основании результатов теории относительного дифференцирования функций множеств [1] для этих поверхностей вводится понятие правильной точки поверхности, являющееся расширением понятия точки, в которой функция $z=w(x,y)$ имеет полный дифференциал. Далее, здесь сообщены новые сведения о площади непрерывной поверхности $z=w(x,y)$ и, в частности, решена проблема Гесце (Geöcze) о представлении площади произвольной непрерывной поверхности $z=w(x,y)$ в виде предела площадей вписанных полиэдральных поверхностей.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $z=w(x,y)$, определенную на прямоугольнике $J_0=\underset{x,y}{\mathcal{E}}\{a_1\leqslant x\leqslant b_1;\ a_2\leqslant y\leqslant b_2\}$. Пусть V — замкнутое выпуклое множество, содержащееся в прямоугольнике J_0. Пусть, кроме того, τ — произвольное число, $0\leqslant\tau<2\pi$. Повернем систему координат xoy вокруг оси oz против движения часовой стрелки на угол τ. Новую систему координат обозначим через $\xi o\eta$. Непрерывную функцию, в которую обратится функция $w(x,y)$ после соответствующей замены переменных x и y на ξ и η, будем обозначать через $w^\tau(\xi,\eta)$. Обозначим затем через $[\alpha,\beta]$ отрезок, являющийся ортогональной проекцией на ось $o\xi$ выпуклого множества V. Обозначим, кроме того, через $\eta_1=\eta_1(\xi)$ и $\eta_2=\eta_2(\xi)$, $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$, соответственно, верхнюю и нижнюю границы выпуклого множества V по отношению к системе координат $\xi o\eta$. Положим

$$g^\tau(V)=g^\tau(w;V)=\int_\alpha^\beta[w^\tau(\xi,\eta_1)-w(\xi,\eta_2)]\,d\xi.$$

Легко заметить, что выражение $g^\tau(V)$ есть аддитивная функция выпуклого множества.

Обозначим затем для произвольного значения ξ_0, $\alpha\leqslant\xi_0\leqslant\beta$, через $W^\tau(\xi_0;\eta_1,\eta_2)$ полную вариацию функции $w^\tau(\xi_0,\eta)$ на отрезке, являющемся пересечением прямой $\xi=\xi_0$ с множеством V. Положим

$$K^\tau(V)=K^\tau(w;V)=\int_\alpha^\beta W^\tau(\xi;\eta_1,\eta_2)\,d\xi.$$

Вернемся к старой системе координат xoy.

Пусть $J=\underset{x,y}{\mathcal{E}}\{\alpha_1\leqslant x\leqslant\beta_1;\ \alpha_2\leqslant y\leqslant\beta_2\}$ — произвольный прямоугольник, содержащийся в прямоугольнике J_0. Положим

$$g(J) = g(w; J) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [w(x, \beta_2) - w(x, \alpha_2)]\, dx,$$

$$h(J) = h(w; J) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [w(\alpha_1, y) - w(\beta_1, y)]\, dy.$$

Без труда замечаем, что при $\tau = 0$ и $\tau = \frac{1}{2}\pi$ имеют место для любого прямоугольника $J \subset J_0$, соответственно, равенства $g^0(J) = g(J)$ и $g^{^1/_2\pi}(J) = h(J)$. Кроме того, получаем, что для любого числа τ, $0 < \tau < \pi$, не равного $\frac{1}{2}\pi$, и для любого прямоугольника $J = \underset{x, y}{\mathcal{E}}\{\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1;\ \alpha_2 \leqslant y \leqslant \beta_2\}$, содержащегося в прямоугольнике J_0 и обладающего тем свойством, что $\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_2 - \alpha_2} = |\operatorname{tg} \tau|$, выполняется равенство $g^\tau(J) = g(J)\cos\tau + h(J)\sin\tau$.

Рассмотрим теперь непрерывную поверхность $z = w(x, y)$, определенную функцией $w(x, y)$ на прямоугольнике J_0. Предположим, что эта поверхность имеет конечную площадь (([2]), гл. V). Обозначим через $\mu(X)$ поверхностную меру множества $X \subset J_0$ ([3]). Будем говорить, что поверхность $z = w(x, y)$ правильна в точке (x, y), если в этой точке существуют относительные производные $g'_\mu(x, y)$ и $h'_\mu(x, y)$, соответственно, выражений $g(J)$ и $h(J)$ по поверхностной мере $\mu(X)$ ([1]) и если для всех значений τ, $0 \leqslant \tau < 2\pi$, существует относительная производная $g^{\tau'}_\mu(x, y)$ выражения $g^\tau(V)$ по $\mu(X)$, удовлетворяющая равенству

$$g^{\tau'}_\mu(x, y) = g'_\mu(x, y)\cos\tau + h'_\mu(x, y)\sin\tau.$$

С помощью указанных выше свойств выражений $g(J)$, $h(J)$ и $g^\tau(V)$ доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Произвольная непрерывная поверхность $z = w(x, y)$ конечной площади правильна в каждой точке $(x, y) \in J_0$, за исключением, возможно, некоторого множества поверхностной меры* 0.

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 2. *Если непрерывная поверхность $z = w(x, y)$ имеет конечную площадь, то в каждой точке $(x, y) \in J_0$, за исключением, возможно, некоторого множества поверхностной меры нуль, для всех τ, $0 \leqslant \tau < 2\pi$, выполняется равенство*

$$K^{\tau'}_\mu(x, y) = |g^{\tau'}_\mu(x, y)| = |g'_\mu(x, y)\cos\tau + h'_\mu(x, y)\sin\tau|.$$

На основании предыдущих теорем доказывается лемма.

Лемма. *Пусть $z = w(x, y)$ — произвольная непрерывная поверхность конечной площади. Тогда для каждого положительного числа ε существует конечная система прямоугольников $R_{\tau_1}, R_{\tau_2}, \ldots, R_{\tau_k}$, содержащихся внутри прямоугольника J_0 и обладающих следующими свойствами:* 1) *они попарно без общих точек*; 2) *на границе каждого из них полная линейная вариация функции $w(x, y)$ ограничена;* 3) *для каждого значения индекса i, $i = 1, 2, \ldots, k$, верхний и нижний пределы выражения*

$$\iint_{R_{\tau_i}} \left\{ \left[\frac{w(x + \rho\cos\tau_i, y + \rho\sin\tau_i) - w(x, y)}{\rho}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{w(x - \rho\sin\tau_i, y + \rho\cos\tau_i) - w(x, y)}{\rho}\right]^2 + 1\right\}^{1/2} dx\, dy,$$

когда ρ стремится к нулю, отличаются от $\mu(R_{\tau_i})$ меньше, чем на $\varepsilon\mu(R_{\tau_i})$; 4) *верхний и нижний пределы выражения*

$$\iint\limits_{\mathscr{E}}\left\{\left[\frac{w(x+\rho, y)-w(x, y)}{\rho}\right]^2+\left[\frac{w(x, y+\rho)-w(x, y)}{\rho}\right]^2+1\right\}^{1/2} dx\,dy,$$

когда ρ стремится к нулю, отличаются от $\mu(\mathscr{E})$ меньше, чем на ε; при этом через $\mathscr{E}$ обозначено замыкание множества $J-\sum\limits_{i=1}^{k} R_{\tau_i}$.

Из этой леммы, во-первых, следует утверждение, являющееся исправлением неосновательно доказанной Саксом [2] неверной теоремы о том, что площадь непрерывной поверхности $z=w(x, y)$, определенной на прямоугольнике J_0, равна

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}}\iint\limits_{J_0}\left\{\left[\frac{w(x+\alpha, y)-w(x, y)}{\alpha}\right]^2+\left[\frac{w(x, y+\beta)-w(x, y)}{\beta}\right]^2+1\right\}^{1/2} dx\,dy,$$

а именно:

Теорема 3. *Пусть $z=w(x, y)$ — произвольная непрерывная поверхность конечной площади, заданная на прямоугольнике J_0; тогда для каждого положительного числа ε существует функция $\tau=\tau(x, y)$, определенная на прямоугольнике J_0, принимающая на нем лишь конечное число различных значений и такая, что нижний и верхний пределы выражения*

$$\iint\limits_{J_0}\left\{\left[\frac{w(x+\rho\cos\tau, y+\rho\sin\tau)-w(x, y)}{\rho}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{w(x-\rho\sin\tau, y+\rho\cos\tau)-w(x, y)}{\rho}\right]^2+1\right\}^{1/2} dx\,dy$$

при стремлении ρ к нулю отличаются от площади поверхности $z=w(x, y)$ меньше, чем на ε.

Во-вторых, на основании этой леммы доказывается

Теорема 4. *Пусть $z=w(x, y)$ — произвольная непрерывная поверхность конечной площади, заданная на прямоугольнике J_0. Тогда для каждого положительного числа ε можно указать на этом же прямоугольнике вписанную в поверхность $z=w(x, y)$ полиэдральную поверхность такую, что диаметр наибольшего из треугольников ее образующих меньше, чем ε, а площадь ее отличается от площади заданной поверхности меньше, чем на ε.*

Доказательство этой теоремы заключается в том, что на основании леммы сначала указывается триангуляция множества $\mathscr{E}$ такая, что сумма площадей вписанных треугольников, соответствующих этой триангуляции, отличается от $\mu(\mathscr{E})$ меньше, чем на $1/2\,\varepsilon$, затем указывается триангуляция каждого прямоугольника R_{τ_i}, $i=1, 2, \ldots, k$, в отдельности, причем такая, что сумма вписанных треугольников, соответствующих этой триангуляции, отличается от $\mu(R_{\tau_i})$ меньше, чем на $\varepsilon/2k$.

Далее доказывается, что упомянутые триангуляции множества $\mathscr{E}$ и каждого прямоугольника R_{τ_i} можно всегда выбрать такими, чтобы они вместе образовали триангуляцию всего прямоугольника J_0. Тогда соответствующая ей вписанная в поверхность $z=w(x, y)$ полиэдральная поверхность обладает указанными свойствами.

Из этой теоремы без труда следует

Теорема 5. *Для каждой непрерывной поверхности $z = w(x, y)$, определенной на прямоугольнике J_0, существует последовательность вписанных в данную поверхность полиэдральных поверхностей $z = p_1(x, y)$, $z = p_2(x, y), \ldots, z = p_n(x, y), \ldots$, определенных на прямоугольнике J_0 и таких, что последовательность функций, их определяющих, равномерно сходится на прямоугольнике J_0 к $w(x, y)$, а предел их площадей равен площади данной поверхности.*

Эта теорема является решением проблемы Гесце для произвольных непрерывных поверхностей вида $z = w(x, y)$.

На основании теорем 1 и 2 доказывается теорема, являющаяся дальнейшим видоизменением упомянутого выше утверждения Сакса.

Теорема 6. *Пусть $z = w(x, y)$ — произвольная непрерывная поверхность конечной площади, определенная на прямоугольнике J_0. Тогда для каждого положительного числа ε существует функция $\tau = \tau(x, y)$, определенная на прямоугольнике J_0, принимающая на нем лишь конечное число значений и такая, что предел выражения*

$$\iint\limits_{J_0} \left\{ \left[\frac{w(x + \rho\cos\tau, y + \rho\sin\tau) - w(x, y)}{\rho} \right]^2 + 1 \right\}^{1/2} dx\,dy$$

при стремлении ρ к нулю отличается меньше, чем на ε, от площади поверхности $z = w(x, y)$.

На основании этой теоремы можно дать иное определение площади непрерывной поверхности $z = w(x, y)$, опирающееся не на понятие площади полиэдральных поверхностей, как обычно (([2]), гл. V), а на понятие длин дуг кривых, лежащих на этой поверхности.

Именно, пусть $V \subset J_0$ — произвольное замкнутое выпуклое множество. Пусть далее τ — произвольное число, $0 \leqslant \tau < 2\pi$. Повернем систему координат xoy вокруг оси oz на угол τ. Новую систему координат обозначим через $\xi o \eta$. Пусть $[\alpha, \beta]$ — отрезок, являющийся ортогональной проекцией на ось $o\xi$ множества V. Пусть затем ξ_0 — произвольное значение, $\alpha \leqslant \xi_0 \leqslant \beta$. Обозначим через $s(\xi_0)$ длину дуги, вырезаемую плоскостью $\xi = \xi_0$ на части поверхности $z = w(x, y)$, расположенной над множеством V, и положим

$$s^\tau(V) = \int\limits_\alpha^\beta s(\xi)\,d\xi.$$

Обозначим теперь через $S(V)$ верхнюю грань множества чисел $s^\tau(V)$ для всех τ, $0 \leqslant \tau < 2\pi$.

Теорема 7. *Пусть $z = w(x, y)$ — произвольная непрерывная поверхность, определенная на прямоугольнике J_0. Тогда, каково бы ни было разбиение прямоугольника J_0 на конечное число выпуклых замкнутых множеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, попарно без общих внутренних точек, существует предел (конечный или бесконечный) суммы*

$$\sum_{i=1}^{n} S(V_i),$$

когда диаметр наибольшего из множеств V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, стремится к нулю, и этот предел равен площади в обычном смысле поверхности $z = w(x, y)$.

Поступило
25 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Верченко, ДАН, 67, № 3 (1949). [2] S. Saks, Theory of Integral, Warszawa, 1937. [3] И. Я. Верченко, Мат. сборн., 10 (52), № 1—2, 11 (1942).