

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

В. И. БЛИНОВ и Т. А. РОЗЕТ

**О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ УГЛЯ**

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 23 V 1949)

Скорость горения угля  $k_s$  определяется, как известно, не только скоростью реакции, но и скоростью подвода кислорода к зоне горения из окружающей среды.

Если допустить, что горение угля есть реакция первого порядка, и концентрацию  $c_w$  кислорода на поверхности сгорающего объекта принять равной ее среднему по поверхности значению  $\bar{c}_w$ ,

$$c_w = \bar{c}_w, \quad (1)$$

то можно положить, что  $\bar{k}_s = \bar{k}c_w = \alpha(c_0 - \bar{c}_w)$ , где  $k$  — константа скорости реакции кислорода с углеродом,  $\alpha$  — коэффициент газообмена,  $c_0$  — концентрация кислорода в окружающей среде. Тогда

$$\bar{k}_s = \frac{kc_0}{1 + k/\alpha}; \quad (2)$$

$\alpha$  определяется из решения дифференциального уравнения диффузии при надлежащих краевых условиях (1).

А. С. Предводителев указал (2), что вместо (1) следует пользоваться условием  $D \frac{\partial c}{\partial n} = kc_w$ , где  $n$  — нормаль к поверхности угля, а  $D$  — коэффициент диффузии кислорода.

Нам представлялось существенным сопоставить результаты, которые получаются при первом и втором способах решения задачи. Это сопоставление в данной работе выполнено для пластинки и цилиндра.

Горение пластинки. Возьмем бесконечно длинную пластинку, обтекаемую потоком газа, содержащего кислород. Скорость потока обозначим через  $v$ , а ширину полоски — через  $a$ . Координатные оси направим так, как показано на рис. 1. Положим, что скорость параллельна оси  $x$ .

Дифференциальное уравнение диффузии для установившегося состояния в данном случае будет иметь вид:

$$\delta \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \delta = \frac{D}{v}. \quad (3)$$

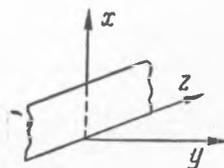


Рис. 1

Подсчитаем коэффициент газообмена  $\alpha$ , входящий в (2), полагая, что  $c_{x=0} = c_0$  и  $c_{y=0} = \bar{c}_w$ . Решение уравнения (3) при взятых краевых условиях имеет вид:

$$c = (c_0 - \bar{c}_w) \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\delta x}}\right) = \bar{c}_w; \quad \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt. \quad (4)$$

Количество кислорода, поступившего в 1 сек. к участку пластинки с длиной в 1 см, будет равно

$$M = \int_0^a D \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0} dx = D(c_0 - \bar{c}_w) \sqrt{\frac{4a}{\pi\delta}} = \alpha\alpha(c_0 - \bar{c}_w); \quad \alpha = \sqrt{\frac{4vD}{\pi a}}. \quad (5)$$

Подставив найденное значение  $\alpha$  в (2), получим  $\bar{k}_s$  для пластинки. Если воспользоваться краевыми условиями в виде  $c_{x=0} = c_0$ ,  $\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0} = hc_w$ , где  $h = k/D$ , то, используя известные приемы (2<sup>-4</sup>), получим решение уравнения (3) в виде

$$c = c_0 \left\{ \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{4\delta x}}\right) + e^{h(y+h\delta x)} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{y+2h\delta x}{\sqrt{4\delta x}}\right) \right] \right\}.$$

Введя обозначения:  $\theta = h^2 \delta x$  и  $\theta_0 = h^2 \delta a$ , выполнив интегрирование и учтя, что  $\bar{k}_s = k\bar{c}_w$ , найдем:

$$\bar{k}_s = \frac{kc_0}{\theta_0} [e^{\theta_0} - 1 - e^{\theta_0} \Phi(\sqrt{\theta_0}) + 2\sqrt{\theta_0/\pi}]. \quad (6)$$

Из табл. 1 видно, что значения величины  $\bar{k}_s/kc_0$ , вычисленные по формулам (2) и (6), совпадают при достаточно малых и при достаточно больших значениях  $\theta_0$  и отличаются друг от друга не больше, чем на 5%, при остальных значениях  $\theta_0$ .

Таблица 1

$\theta_0 = h^2 \delta a = \frac{4k^2}{\pi a^2}$		$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	0,001	0,01	0,1	1	3
$\frac{\bar{k}_s}{kc_0}$	по (2)	0,999	0,991	0,973	0,919	0,781	0,530	0,395
$\frac{\bar{k}_s}{kc_0}$	по (6)	0,999	0,992	0,976	0,930	0,804	0,556	0,414
$\theta_0$		9	25	100	400	1000	3000	10000
$\frac{\bar{k}_s}{kc_0}$	по (2)	0,273	0,184	0,1014	0,0534	0,0345	0,0202	0,0112
$\frac{\bar{k}_s}{kc_0}$	по (6)	0,285	0,190	0,1034	0,0540	0,0347	0,0203	0,0112

Горение угольного цилиндра. Рассмотрим горение цилиндра в ламинарном потоке газа, скорость которого равна  $v$  и перпендикулярна к оси цилиндра. Ось  $x$  направим параллельно  $v$ , а  $z$  — по оси цилиндра.

Дифференциальное уравнение диффузии в данном случае можно написать в виде (1):

$$\delta \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} = \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \quad \delta = \frac{D}{v}, \quad (7)$$

где  $\psi = y(1 - r_0^2/r^2)$ ,  $\varphi = -x(1 + r_0^2/r^2) + 2r_0$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ , а  $r_0$  — радиус цилиндра.

При краевых условиях  $c_{\varphi=0} = c_0$  и  $c_{\psi=0} = \bar{c}_w$  решение уравнения (7) напишется так:

$$c = (c_0 - \bar{c}_w) \Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4\delta\varphi}}\right) + \bar{c}_w.$$

Так как на поверхности цилиндра

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2 \sin \beta \frac{\partial c}{\partial \psi}, \quad (8)$$

где  $\psi$  — угол между  $r$  и осью  $x$ , то количество кислорода, поступившего в 1 сек. к полоске на поверхности цилиндра с длиной в 1 см и шириной  $r_0 d\beta$ , будет равно  $D \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=r_0} r_0 d\beta = 2D \sin \beta \left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} r_0 d\beta = D \left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} d\varphi$ , а количество кислорода  $M$ , подведенного в 1 сек. к единице длины цилиндра,

$$M = 2 \int_0^{4r_0} D \left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} d\varphi = \frac{8}{\sqrt{\pi}} (c_0 - \bar{c}_w) \sqrt{Dr_0 v} = 2\pi r_0 \alpha (c_0 - \bar{c}_w), \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{Dv}{\pi r_0}}.$$

Займемся теперь решением уравнения (7) при следующих условиях на границе:  $c_{\varphi=0} = c_0$  и  $D \left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=r_0} = kc_{r=r_0}$ . Так как на поверхности цилиндра выполняется соотношение (8) и  $\sin \beta = \sqrt{\frac{\varphi}{r_0} - \frac{\varphi^2}{4r_0^2}}$ , то второе краевое условие можно написать так:

$$\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} \left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = hc_{\psi=0}, \quad \text{где } \vartheta = \varphi/4r_0, \quad h = k/4D. \quad (10)$$

Легко установить, что функция

$$c(\varphi, \psi) = c_0 - \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \int_0^{\varphi} \frac{\exp\left(-\frac{\psi^2}{4\delta(\varphi-\tau)}\right)}{\sqrt{\varphi-\tau}} f_1(\tau) d\tau$$

при произвольной и непрерывной в интервале  $(0, 4r_0)$  функции  $f_1(\varphi)$  удовлетворяет условию (7) и первому краевому условию. Кроме того,  $\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = f_1(\varphi)$ .

Определим теперь  $f_1(\varphi)$  так, чтобы выполнялось краевое условие (10), т. е. чтобы  $\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} f_1(\varphi) = hc$  при  $\psi = 0$ .

Введя обозначения:  $\tau = 4r_0\sigma$ ,  $f_1(4r_0\sigma) = f(\sigma)$ ,  $\theta = \frac{2k}{\pi\alpha}$ ,  $\alpha = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{Dv}{\pi r_0}}$ , придем к такому интегральному уравнению с искомой функцией  $f(\vartheta)$ :

$$\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} f(\vartheta) + \frac{\theta}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{f(\sigma)}{\sqrt{\vartheta-\sigma}} d\sigma = hc_0. \quad (11)$$

Будем искать решение уравнения (11) в виде ряда

$$f(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \vartheta^n. \quad (12)$$

Вычисления дают следующие рекуррентные формулы для коэффициентов ряда (12):

$$a_0(1 + \theta) = hc_0, \quad a_n \left[ 1 + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \theta \right] = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} a_{n-2} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} a_{n-3} + \dots + \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} a_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Сходимость степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \vartheta^n$ , а вместе с ней и законность почленного выполнения операций, обозначенных в левой части (11), устанавливается на основании следующих соображений. Заметив, что коэффициенты  $a_n$  ряда (12) зависят от  $\theta$ , положим  $\theta = 0$  и обозначим соответствующие значения коэффициентов через  $A_n$ . Тогда (11) дает, что  $A_0 = hc_0$ ,  $A_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} hc_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \vartheta^n$  сходится при условии  $0 \leq \vartheta < 1$ . Формула (13) показывает, что при  $\theta > 0$  всегда  $a_n < A_n$ . Следовательно, ряд (12) и подавно сходится при условии  $0 \leq \vartheta < 1$ .

Нетрудно установить, что

$$M = 2 \int_0^{4r_0} D \left( \frac{\partial c}{\partial \psi} \right)_{\psi=0} d\varphi = 2D \int_0^1 4r_0 f(\vartheta) d\vartheta = 16r_0 a_0 DS, \quad \bar{k}_s = \frac{2}{\pi} \frac{kc_0}{1 + \theta} S, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{a_n}{a_0}. \quad (14)$$

Так как степенной ряд, полученный в результате почленного интегрирования, сходится и на конце промежутка интегрирования, т. е. при  $\vartheta = 1$ , то интегрирование по всему промежутку  $(0, 1)$  законно.

$S$  зависит только от  $\theta$ . При  $\theta = \infty$   $S = 1$  и  $\bar{k}_s = kc_0$ . Если  $\theta = 0$ , то  $S = \pi/2$  и  $\bar{k}_s = kc_0$ .

Таблица 2.

$\theta$		$1 \cdot 10^{-4}$	0,001	0,01	0,1	1	10	100
$\frac{\bar{k}_s}{kc_0}$	по (2)	1,000	0,998	0,985	0,86	0,39	0,060	0,0063
	по (14)	1,000	0,998	0,987	0,88	0,41	0,061	0,0063

Табл. 2 показывает, что значения величины  $\bar{k}_s / kc_0$ , вычисленные по формулам (2) и (14), совпадают при достаточно малых и при достаточно больших значениях  $\theta$  и отличаются друг от друга не больше, чем на 6%, при остальных значениях  $\theta$ .

Ленинградский институт  
авиационного приборостроения

Поступило  
31 III 1949

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. И. Блинов, Изв. Всесоюз. теплотехн. ин-та, 7 (1934); Тр. Воронежск. гос. ун-та, 11, в. 1 (1939). <sup>2</sup> А. С. Предводителев, ЖТФ, 10, в. 16 (1940). <sup>3</sup> В. С. Пушкин, ЖТФ, 18, в. 1 (1948). <sup>4</sup> Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, 1947.