Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Действительный член АН Груз.ССР В. Д. КУПРАДЗЕ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ТЕЛА С ЗАДАННЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

В этой работе построены простые интегральные уравнения задачи, названной в заглавии, и дано полное их исследование. Граничные задачи динамики упругих тел, в частности интересующая нас здесь задача об установившихся колебаниях при заданных на границе смещениях, давно привлекают внимание и им посвящено много работ ([5]); решение последней задачи в одном случае (плоская задача) принадлежит Д. И. Шерману ([3]). Однако с той полнотой и общностью, как это сделано ниже, пространственная задача, как нам кажется, раньше не рассматривалась.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассматривается конечная B_i или бесконечная B_a часть пространства, ограниченная конечным числом замкнутых регулярных поверхностей, взаимно не касающихся и не пересекающихся и имеющих в совокупности границей поверхность S. Пространство $(B_{i,a}+S)$ представляет изотропную, однородную упругую среду с постоянными Лямэ λ, μ; вектор бесконечно малых смещений точки $P(x_1, x_2, x_3)$ будем обозначать через $u(u_1, u_2, u_3)$.

Предполагая, что рассматриваемая среда находится в состоянии установившихся колебаний с постоянной частотой ω, мы решаем следующую задачу:

Найти непрерывный в области $(B+S)$ вектор $u(u_1, u_2, u_3)$, имеющий в B непрерывные производные первых двух порядков и удовлетворяющий уравнению

$$\Delta^* u+\frac{\omega^2}{\mu}u\equiv\Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}u+\frac{\omega^2}{\mu}u=0, \tag{1}$$

если известно, что на граничной поверхности S u принимает непрерывные значения $f(P)$ и на бесконечности (в случае $B\equiv B_a$) удовлетворяет условию излучения.

Доказывается, что эта задача допускает единственное решение ([4]). Если в точке $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ поместим элементарные источники, пульсирующие с частотой ω, соответственно, в направлении x_1, x_2, x_3, то три соответствующих решения уравнения (1) образуют симметричную матрицу $T(P, Q)$ с элементами:

$$u_\sigma^s(P, Q)=\left[\frac{2\varphi(r)}{r^2}+(n-m)e^{ik_1r}\right]\frac{\varepsilon_{\sigma s}}{r}-$$
$$-\left[\frac{3\varphi(r)}{r^2}+\psi(r)\right]\frac{\partial^2 r}{\partial x_s\partial x_\sigma},\quad s,\sigma=1,2,3, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{\sigma s}=1$ при $\sigma=s$ и $\varepsilon_{\sigma s}=0$ при $\sigma\neq s$; $k_1^2=\omega^2/a^2$, $k_2^2=\omega^2/b^2$, $a^2=\lambda+2\mu$, $b^2=\mu$, $m=(a^2-b^2)/2a^2b^2$, $n=(a^2+b^2)/2a^2b^2$; r — расстояние между точками P и Q; $\varphi(r)=\frac{1}{\omega^2}\Big[(1-ik_1r)e^{ik_1r}+(1-ik_2r)e^{ik_2r}\Big]$, $\psi(r)=\frac{1}{\omega^2}[k_1^2e^{ik_1r}-k_2^2e^{ik_2r}]$. При $\omega=0$ матрица $T(P,Q)$ обращается в матрицу $T^0(P,Q)$ с элементами

$$u_\sigma^s(P,Q)=\frac{m+n}{r}\varepsilon_{\sigma s}-m\frac{\partial^2 r}{\partial x_s\partial x_\sigma}. \tag{3}$$

Обозначив через T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3} и $T^0_{x_1}$, $T^0_{x_2}$, $T^0_{x_3}$ последовательно три столбца, соответственно, в матрицах $T(P,Q)$ и $T^0(P,Q)$, будем иметь, согласно сказанному,

$$\Delta^* T_{x_s}+k_2^2T_{x_s}=0, \tag{4}$$

$$s=1,2,3;$$

$$\Delta^* T^0_{x_s}=0, \tag{5}$$

или, в матричной записи, $\Delta^*T(P,Q)+k_2^2T(P,Q)=0$, $\Delta^*T^0(P,Q)=0$.

Легко проверить, что

$$\operatorname{div}T_{x_\sigma}=(n-m)\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\frac{e^{ik_1r}}{r};\quad \operatorname{rot}_{x_1}T_{x_1}=0, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}_{x_2}T_{x_1}=(m+n)\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{ik_2r}}{r},\quad \operatorname{rot}_{x_3}T_{x_1}=-(m+n)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{e^{ik_2r}}{r},\quad \sigma=1,2,3,$$

и аналогично для T_{x_2} и T_{x_3} по циклической последовательности индексов.

Вводим векторную операцию L, определенную следующим образом:

$$Lu=\frac{m+n}{n}\frac{du}{d\nu}+\frac{m(m+n)}{n(n-m)}\bar\nu\operatorname{div}u+\frac{m}{n}[\bar\nu\operatorname{rot}u], \tag{7}$$

где u — произвольный вектор, $\bar\nu$ — орт положительной (внутренней) нормали, $[\bar\nu\operatorname{rot}u]$ — векторное произведение $\bar\nu$ на $\operatorname{rot}u$. Символом $L_QT(P,Q)$ будем обозначать совокупность трех векторов $L_QT_{x_1}$, $L_QT_{x_2}$, $L_QT_{x_3}$, индекс Q при операторе L указывает на то, что соответствующие операции выполняются относительно точки Q; можно писать:

$$L_QT(P,Q)=\begin{Vmatrix} L_1T_{x_1} & L_1T_{x_2} & L_1T_{x_3}\\ L_2T_{x_1} & L_2T_{x_2} & L_2T_{x_3}\\ L_3T_{x_1} & L_3T_{x_2} & L_3T_{x_3}\end{Vmatrix}, \tag{8}$$

L_1, L_2, L_3 — проекции вектора L на оси x_1, x_2, x_3.

Произведя вычисления по (7), согласно (2), (6) и (8), получим

$$L_\sigma T_{x_s}=\frac{m+n}{n}\frac{du_\sigma^s}{d\nu_Q}+\frac{m(m+n)}{n}\left(\cos\nu\xi_\sigma\frac{\partial}{\partial\xi_s}\frac{e^{ik_1r}}{r}+\cos\nu\xi_s\frac{\partial}{\partial\xi_\sigma}\frac{e^{ik_2r}}{r}\right)-$$

$$-\varepsilon_{\sigma s}\frac{m(m+n)}{n}\frac{\partial}{\partial\nu_Q}\frac{e^{ik_2r}}{r},\quad \sigma,s=1,2,3. \tag{8'}$$

Полагая здесь $\omega=0$, будем иметь

$$L_\sigma T^0_{x_s}=\left(\frac{n^2-m^2}{n}\varepsilon_{\sigma s}+\frac{3m(m+n)}{n}\frac{\partial r}{\partial x_s}\frac{\partial r}{\partial x_\sigma}\right)\frac{d}{d\nu_Q}\frac{1}{r}. \tag{9}$$

Симметричную матрицу, составленную из этих элементов, обозначим через $L_QT^0(P,Q)$. Легко убеждаемся в том, что

$$\Delta_P^*\{L_QT^0(P,Q)\}=0, \tag{10}$$

операция Δ^* выполняется здесь относительно точки P.

2. Рассмотрим тензор

$$T'(P, Q) = T^0(P, Q) + \frac{\omega^2}{4\pi}\iiint T(P,Q')\,T^0(Q', Q)\,d\tau_{Q'}, \tag{11}$$

где интеграл берется по всему пространству; пользуясь свойством тензора $T(P, Q)$ [1] и условием (10), можно показать, что $\Delta_P^* T'(P, Q) + k_2^2 T'(P, Q) = 0$. Рассмотрим союзную матрицу

$$\overline{T'(P, Q)} = T^0(P, Q) + \frac{\omega^2}{4\pi}\iiint T^0(P, Q')\,T(Q', Q)\,d\tau_{Q'};$$

точно так же легко получить, что $\Delta_P^* \overline{T'(P, Q)} = -k_2^2 T(P, Q)$, откуда $\overline{T'(P, Q)} = T(P, Q) + E(P, Q)$, где $E(P, Q)$ есть регулярное всюду решение уравнения (5), обращающееся на бесконечности в нуль; нетрудно показать, что $E(P, Q) \equiv 0$; следовательно, $\overline{T'(P, Q)} = T(P, Q)$, или $T'(P, Q) \equiv T(P, Q)$. Подставляя это значение в (11), получаем интегральное уравнение для матрицы фундаментальных решений:

$$T(P, Q) = T^0(P, Q) + \frac{\omega^2}{4\pi}\iiint T(P, Q')\,T^0(Q', Q)\,d\tau_{Q'}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$T^*(P, Q) = L_Q T^0(P, Q) + \frac{\omega^2}{4\pi}\iiint T(P, Q')\,L_Q T^0(Q', Q))\,d\tau_{Q'}. \tag{13}$$

Так же, как и выше, имеем

$$\Delta_P^* T^*(P, Q) + k_2^2 T^*(P, Q) = 0. \tag{14}$$

Составим союзную матрицу

$$\overline{T^*(P, Q)} = L_P T^0(P, Q) + \frac{\omega^2}{4\pi}\iiint L_P T^0(P, Q')\,T(Q', Q)\,d\tau_{Q'},$$

или, согласно (12):

$$\overline{T^*(P, Q)} = L_P\left\{T^0(P, Q) + \frac{\omega^2}{4\pi}\iiint T(P, Q')\,T^0(Q', Q)\,d\tau_{Q'}\right\} = L_P T(P, Q). \tag{15}$$

Отсюда следует, что $T^*(P, Q) = \overline{L_P T(P, Q)}$. Но $\overline{L_P T(P, Q)}$, очевидно, есть матрица

$$\begin{Vmatrix} L_1 T_{x_1} & L_2 T_{x_1} & L_3 T_{x_1} \\ L_1 T_{x_2} & L_2 T_{x_2} & L_3 T_{x_2} \\ L_1 T_{x_3} & L_2 T_{x_3} & L_3 T_{x_3} \end{Vmatrix},$$

полученная из (8) транспозицией строк со столбцами.

3. Интеграл, взятый по границе области $W(P) = \iint\limits_S T^*(P, Q)\,\mu(Q)\,ds_Q$, где $\mu(Q)$ есть некоторый вектор, назовем потенциалом двойного слоя; он удовлетворяет уравнению (14) и условию излучения на бесконечности; вместе с тем, он имеет свойство разрыва на S, присущее, например, обычному гармоническому потенциалу двойного слоя [1]. Наряду с $W(P)$ мы будем также рассматривать интеграл вида $V(P) = \iint\limits_S T(P, Q)\,\nu(Q)\,ds_Q$, где $\nu(Q)$ — некоторый вектор; $V(P)$, очевидно, также есть решение (14) и удовлетворяет условию излучения; будем называть этот интеграл потенциалом простого слоя. Из (9) и (13) вытекает, что $W(P)$ на поверхности S допускает полярность порядка

меньше двух; поэтому интегральное уравнение задачи [1]:

$$\pm\mu(P)+\iint_S T^*(P, Q)\mu(Q)\,ds_Q=f(P), \quad P\in S, \tag{16}$$

есть уравнение Фредгольма.

Выбирая отрицательный знак перед $\mu(P)$ в (16), получаем однородное уравнение внешней задачи

$$\mu(P)-\iint_S T^*(P, Q)\mu(Q)\,ds_Q=0 \tag{17}$$

и союзное с ним уравнение, согласно (15):

$$\nu(P)-\iint_S L_P T(P, Q)\nu(Q)\,ds_Q=0. \tag{18}$$

Пусть уравнение (17) находится на характеристическом числе и пусть

$$\mu_1^1(P),\ \mu_2^1,\dots,\mu_{p_1}^1;\ \mu_1^2,\ \mu_2^2,\dots,\mu_{p_2}^2;\dots;\ \mu_1^r,\ \mu_2^r,\dots,\mu_{p_r}^r\ *;$$
$$\nu_1^1(P),\ \nu_2^1,\dots,\nu_{p_1}^1;\ \nu_1^2,\ \nu_2^2,\dots,\nu_{p_2}^2;\dots;\ \nu_1^r,\ \nu_2^r,\dots,\nu_{p_r}^r$$

суть главные вектор-функции соответственно уравнений (17) и (18).

Совершенно так же, как это сделано нами в работе [2], доказывается

Теорема. *Главные вектор-функции уравнений* (17) *представляют собой граничные значения потенциалов простых слоев, плотностями которых служат линейные комбинации главных вектор-функций союзной системы уравнений* (18). *В частности*:

$$\mu_k^i=\sum_{j=i}^{r}\alpha_j^i\iint T(P, Q)\,\nu_{p_j-k+1}^j(Q)\,ds_Q; \qquad \begin{array}{l} i=1;\ k=1,\dots,p_1,\\ i=r,\ k=1,\dots,p_r.\end{array}$$

Вместо уравнения (16) рассмотрим уравнение:

$$\mu^*(P)-\iint_S T^*(P, Q)\mu^*(Q)\,ds_Q=f(P)+\sum_{i=1}^{r}\beta_i\mu_{p_i}^i(P),$$

где $\beta_i=\iint_S f(P)\,\nu_{p_i}^i(P)\,ds_P$. Такое уравнение разрешимо вследствие биортонормируемости системы главных функций союзных систем. С другой стороны, согласно приведенной выше теореме [2]:

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i\mu_{p_i}^i(P)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{r}\alpha_j^i\beta_i\iint_S T(P, Q)\,\nu_{p_j-p_i+1}^j(Q)\,ds_Q=\iint_S T(P, Q)\,\upsilon(Q)\,ds_Q;$$

поэтому решение граничной задачи дается следующей комбинацией потенциалов:

$$\iint_S\{T^*(P, Q)\mu^*(Q)-T(P, Q)\,\upsilon(Q)\}\,ds_Q.$$

Единственность этого решения вытекает из условия излучения [4].

Поступило
17 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Сообщ. АН ГССР, 9, № 2 (1948). [2] В. Д. Купрадзе, Тр. Тбилисск. гос. ун-та им. Сталина, 26а (1944). [3] Д. И. Шерман, Прикладн. матем. и мех., 10, в. 5—6 (1946). [4] В. Д. Купрадзе, ДАН, № 2, 100 (1935). [5] H. Weyl, Rend. Circ. Matem. Pal., 39 (1915).

* Мы пользуемся здесь обозначениями, принятыми в работе [2].