Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1949)

1. Пусть $A=\{a,\ldots,a\}$ — конечное множество, лежащее в метрическом пространстве R. Обозначая через $d_x=\rho(x, A)$ расстояние точки x от множества A, видим, что d_x-окрестность $O(x, d_x)$ точки x не содержит точек множества A, тогда как на границе этой окрестности лежит по крайней мере одна точка множества A. Число точек множества A, лежащих на границе окрестности $O(x, d_x)$,— т. е. число точек $a_i \in A$, для которых $\rho(x, a_i)=\rho(x, A)$,— было названо П. С. Александровым в работе (1) (стр. 123—125) порядком точки x относительно множества A. Говорят, далее, что множество A имеет в пространстве R порядок n, если существует точка $x \in R$, порядок которой относительно A равен n, и нет точки $x \in R$, порядок которой относительно A больше n.

П. С. Александров впервые заметил в цитированном месте работы (1), что при достаточно малом $\varepsilon>0$ всякая ε-сеть n-мерного компакта Φ имеет в этом компакте порядок $\geqslant n+1$. Там же П. С. Александров поставил вопрос, существует ли во всяком n-мерном компакте при любом $\varepsilon>0$ ε-сеть порядка $n+1$. Решению этого вопроса и посвящены нижеследующие рассуждения.

2. Назовем, прежде всего, n-мерный компакт Φ метрически правильным, или, для краткости, просто правильным, если при любом $\varepsilon>0$ он содержит ε-сеть, имеющую в Φ порядок $n+1$. Мы покажем, что все полиэдры суть правильные компакты *; что всякий компакт гомеоморфен некоторому правильному компакту, но что существуют даже в трехмерном евклидовом пространстве компакты, свойством метрической правильности не обладающие.

Теорема 1. *Всякий полиэдр есть правильный компакт.*

Эта теорема, очевидно, вытекает из следующего предложения:

Теорема 1'. *Всякая ε-сеть n-мерного полиэдра $P^n \subset R^m$, не содержащего изолированных точек, сколь угодно малым сдвигом может быть переведена в ε-сеть, имеющую в P^n порядок $\leqslant n+1$.*

Докажем теорему 1'. В основе доказательства лежит

Лемма 1. *Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ — какие-нибудь $n+2$ точки n-мерного полиэдра P^n, а T^p — произвольный симплекс раз навсегда выбранной триангуляции этого полиэдра.*

Тогда сколь угодно малым сдвигом можно точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$ перевести соответственно в точки $a_0', a_1', \ldots, a_n'$ полиэдра P^n, обла-

* Это доказывается совершенно элементарно; в 1937 г. W. Wilson довольно сложными рассуждениями доказал в работе (4), что всякий полиэдр гомеоморфен правильному компакту.

дающие тем свойством, что в P^n нет ни одной точки, отстоящей от всех точек a_i' на одно и то же расстояние.

Доказательство леммы 1 начнем со следующего замечания: сколь угодно малым сдвигом можно точку a_1 перевести в точку $a_1' \in P^n$ таким образом, чтобы данный r-мерный выпуклый многогранник $\Theta \subseteq P^n$ содержал по крайней мере одну точку x, для которой $\rho(x, a_1') \neq \rho(x, a_0)$: достаточно взять произвольно $x \in \Theta$ и пошевелить слегка точку a_1 так, чтобы она не принадлежала нигде не плотному в P^n множеству, являющемуся пересечением полиэдра P^n с $(m-1)$-мерной сферой, проходящей через a_0 и имеющей свой центр в x. Заметим, что пересечение многогранника Θ с плоскостью L_1^{m-1}, проходящей перпендикулярно к отрезку $\overline{a_0 a_1'}$ через его середину, будет выпуклым многогранником размерности $\leqslant r-1$.

Через L_i^{m-1} обозначим $(m-1)$-мерную плоскость, проходящую через середину a_0 отрезка $\overline{a_0 a_i}$ перпендикулярно к этому отрезку; предположим, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ уже подвергнуты таким произвольно малым сдвигам, что $T^p \cap L_1^{m-1} \cap \cdots \cap L_k^{m-1}$ имеет размерность $\leqslant p-k$. Сдвинем произвольно мало точку a_{k+1} таким образом, чтобы в выпуклом многограннике $T^p \cap L_1^{m-1} \cap \cdots \cap L_k^{m-1}$ существовала точка, имеющая неравные расстояния от a_0 и от a_{k+1}. Тогда пересечение $(T^p \cap L_1^{m-1} \cap \cdots \cap L_k^{m-1}) \cap L_{k+1}^{m-1}$ будет иметь размерность $\leqslant p-k-1$. При $k = n+1$ получим, что $T^p \cap L_1^{m-1} \cap \cdots \cap L_{n+1}^{m-1}$ пусто. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если точки $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ полиэдра P^n таковы, что нет точки $x \in P^n$, отстоящей от всех a_i на одно и то же расстояние, то таковы же и точки $a_0', a_1', \ldots, a_{n+1}'$, полученные любым достаточно малым сдвигом точек $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$.*

В самом деле, для $x \in P^n$ обозначим через σ_x наибольшее из положительных чисел $|\rho(x, a_i) - \rho(x, a_k)|$, $i, k = 0, 1, \ldots, n+1$; нижняя грань всех σ_x положительна, откуда лемма 2 и вытекает.

Из лемм 1 и 2 следует, что сколь угодно малым сдвигом точек $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ можно достигнуть, что ни в одном из симплексов заданной триангуляции полиэдра P^n не содержится точки, равноудаленной от всех точек $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$.

Если теперь дана какая-нибудь ε-сеть N полиэдра P^n, то, перебирая по очереди все подмножества множества N, содержащие по $n+2$ точек, и применяя к ним леммы 1 и 2, можно сколь угодно малым сдвигом перевести множество N в множество $N' \subset P^n$, также являющееся ε-сетью нашего полиэдра и имеющее по отношению к нему порядок $\leqslant n+1$. Теорема 1', а значит и теорема 1 этим доказаны.

3. Даже в трехмерном пространстве R^3 существуют компакты, не являющиеся метрически правильными. Примером такого компакта может служить знаменитое нульмерное совершенное множество Φ Антуана — Урысона (см. ([3]), стр. 121), обладающее тем свойством, что всякий достаточно малый выпуклый многогранник, содержащий внутри себя точки множества Φ, содержит их и на границе. Покажем, что с этим последним свойством не совместима метрическая правильность компакта Φ. Действительно, предположим, что для данного произвольно малого ε в Φ существует ε-сеть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, имеющая в Φ порядок 1 (ведь $\dim \Phi = 0$). Обозначим через $B_{i,k}$ множество всех точек $x \in R^3$, для которых $\rho(x, a_i) \leqslant \rho(x, a_k)$. Множество $B_{i,k}$ есть, очевидно, полупространство, поэтому множество B_i, состоящее из всех точек $x \in R^3$, удовлетворяющих неравенствам $\rho(x, a_i) \leqslant \rho(x, a_k)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, s$, есть пересечение конечного числа полупространств,

т. е. выпуклый многогранник (в собственном смысле слова, или в обобщенном — когда допускаются бесконечные многогранники). Так как граница каждого B_i состоит из точек x, для которых имеются по крайней мере две ближайшие точки множества A, и A по предположению имеет в Φ порядок 1, то ни одна точка Φ не лежит на границе какого-либо B_i. Далее, все точки множества $\Phi \cap B_i$ отстоят от точки a_i на расстояние $< \varepsilon$, поэтому куб Q_i стороны 2ε с центром в a_i не содержит на своей границе ни одной точки множества Φ. Положим $D_i = B_i \cap Q_i$. На границах выпуклых (собственных) многогранников D_i не лежит ни одной точки множества Φ, и эти границы осуществляют 2ε-отделение любой точки $x \in \Phi$, вопреки основному свойству множества Антуана — Урысона.

4. Переходим к доказательству основного результата.

Теорема 2. *Всякий конечномерный компакт Φ гомеоморфен некоторому метрически правильному компакту; если $\dim \Phi = n$ и $\Phi \subset R^{2n+1}$, то существует топологическое отображение компакта Φ в R^{2n+1}, сколь угодно мало отличающееся от тождественного отображения и переводящее Φ в метрически правильный компакт.*

Теорема 2 содержится в следующем предложении:

Теорема 2′. *В пространстве C всех непрерывных отображений n-мерного компакта Φ в пространство R^{2n+1} множество всех топологических отображений на метрически правильные компакты есть всюду плотное в C множество типа G_δ.*

Теорема 2′ легко вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon > 0$ дано произвольно. Обозначим через C_ε множество всех ε-отображений (в смысле П. С. Александрова* (2)*, стр. 203, определение 1:11) компакта Φ на компакты $\Phi' \subset R^{2n+1}$, содержащие ε-сети порядка $\leqslant n+1$ в Φ'. Множество C_ε открыто и всюду плотно в C.*

Предположим, что лемма 3 доказана. Тогда множество $C_0 = \bigcap_k C_{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$, есть всюду плотное в C множество типа G_δ, состоящее из топологических отображений на правильные компакты, лежащие в R^{2n+1}.

Итак, остается доказать лемму 3. Эта лемма вытекает из следующих двух утверждений, из которых первое в силу теоремы 1 гарантирует, что C_ε всюду плотно в C, а второе — что C_ε открыто в C.

Утверждение 1°. Всякое непрерывное отображение n-мерного компакта Φ в пространство R^{2n+1} можно как угодно хорошо апроксимировать ε-отображением на n-мерный полиэдр $P \subset R^{2n+1}$.

Утверждение 2°. Если компакт $\Pi \subset R^{2n+1}$ содержит ε-сеть A порядка $\leqslant n+1$, то такую же сеть содержит и всякий компакт $\Pi' \subset R^{2n+1}$, отклонение $\alpha(\Pi', \Pi)$ которого от компакта Π (см. (5), стр. 166) достаточно мало.

Так как утверждение 1° выражает собою хорошо известный элементарный факт (см. (2), стр. 211, теорема 1:51), то все сводится к доказательству утверждения 2°.

Для достижения этой последней цели сначала доказываем (автоматическим рассуждением от противного), что при достаточно малом $\delta > 0$ множество A сохраняет порядок $\leqslant n+1$ и в $[O(\Phi, \delta)]$ *. Выбрав δ, удовлетворяющее этому условию, находим такое $\delta' > 0$, что всякое множество $A' \subset O(\Phi, \delta)$, полученное из A посредством δ'-сдвига, также имеет в $O(\Phi, \delta)$ порядок $\leqslant n+1$ (существование такого δ', в свою очередь, легко доказывается от противного).

---

* Квадратные скобки обозначают замыкание.

Если теперь отклонение $\alpha(\Pi, \Pi')$ достаточно мало, то Π' не только лежит в $O(\Phi, \delta)$, но и содержит ε-сеть A', получающуюся из A посредством δ'-сдвига, и эта сеть имеет в $O(\Phi, \delta)$, значит и подавно в Π', порядок $\leqslant n+1$.

Теоремы 2 и 2' полностью доказаны *.

5. Доказанная теорема позволяет охарактеризовать размерность компактов посредством весьма наглядных метрических свойств их ε-сетей. Пусть дан компакт Φ; если существует такое целое число $k \geqslant 0$, что при всяком $\varepsilon > 0$ в Φ имеется ε-сеть порядка $k+1$ в Φ, то наименьшее число k, удовлетворяющее этому условию, называем *метрическим порядком компакта* Φ. Если же ко всякому целому числу N можно найти такое $\varepsilon > 0$, что любая ε-сеть в Φ имеет порядок $> N$, то метрический порядок компакта Φ полагается равным ∞.

Из доказанного следует, что *размерность любого компакта Φ равна наименьшему целому числу* (соответственно равна ∞), *являющемуся метрическим порядком какого-либо компакта, гомеоморфного компакту* Φ.

Поступило
19 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Ann. of Math., 30, 101 (1929). [2] П. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. [3] П. Урысон, Fund. Math., 7, 30 (1926). [4] W. Wilson, Compositio mathematica, 4, 287 (1937). [5] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937.

---

* При доказательстве теоремы 2 я воспользовался одним замечанием В. Болтянского, которому и приношу благодарность.