Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Известно, что введенные еще Г. В. Колосовым ([1]) комплексные формы напряжений в ряде случаев значительно упрощают как вывод общих формул, так и решение конкретных задач плоской теории упругости. Этот метод, нашедший дальнейшее развитие в работах акад. Н. И. Мусхелишвили ([2]), плодотворно применяется также и в других двумерных задачах математической физики, в частности, в теории упругих оболочек. Следуя этому методу, автор указал ([3–5]) еще в 1945 г. новый способ интегрирования уравнений сферической оболочки, приводящий к явному выражению для усилий и моментов, содержащему четыре произвольных голоморфных функции одной комплексной переменной.

Этот метод применялся также к оболочкам общего вида, но существенных упрощений до сих пор не было достигнуто ([6]). Оказывается, что эффективность метода в сильной степени зависит от выбора системы координат. Значительные упрощения достигаются тогда, когда уравнения оболочки записаны в изотермической системе координат, т. е. в системе координат, относительно которой квадрат линейного элемента срединной поверхности оболочки имеет вид

$$\partial s^2 = A(\partial x^2 + \partial y^2), \tag{1}$$

где A — положительная, достаточное число раз дифференцируемая функция.

Основные уравнения равновесия оболочки (в усилиях и моментах) в изотермической системе координат можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 S}{\partial z} + \frac{1}{A}\frac{\partial AT}{\partial \zeta} - HN - G\overline{N} + X = 0, \qquad (2^1)$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial AN}{\partial z} + \frac{1}{A}\frac{\partial A\overline{N}}{\partial \zeta} + \frac{AG\overline{S}}{2} + \frac{A\overline{G}S}{2} + \frac{AH}{2}(T + \overline{T}) + Z = 0, \qquad (2^2)$$

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 P}{dz} + \frac{1}{A}\frac{\partial AQ}{\partial \zeta} - N + Y = 0, \qquad (2^3)$$

$$\left.\begin{aligned}
T &= T^{11} + T^{22} + i(T^{12} - T^{21}),\\
S &= T^{11} - T^{22} + i(T^{12} + T^{21}),\\
P &= -i(M^{11} - M^{22}) + M^{12} + M^{21},\\
Q &= -i(M^{11} + M^{22}) + M^{12} - M^{21},\\
N &= N^1 + iN^2, \quad N = N^1 - iN^2,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$H = \frac{1}{2}(\pi_1^1 + \pi_2^2), \quad G = \frac{1}{2}(\pi_1^1 - \pi_2^2 + 2i\pi_1^2), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, N^{α} — контравариантные составляющие тензоров усилий, моментов и поперечной силы. H и G — заданные функции, ибо $A\pi_\alpha^\beta = \pi_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы срединной поверхности, причем H — средняя кривизна, а $|G|^2 = K - H^2$, где K — гауссова кривизна. В случае сферы (и только тогда) $G = 0$. Кроме того, X, Y, Z — заданные функции, выражающиеся через внешние силы, действующие на оболочку.

Следует отметить, что уравнения (2) инварианты относительно конформного преобразования области. Это важное обстоятельство есть следствие того, что при конформном преобразовании изотермическая сеть на поверхности переходит опять в изотермическую сеть.

Подставляя теперь в (2) вместо T, S, P, Q их выражения через компоненты вектора смещения срединной поверхности и используя уравнения Гаусса — Кодацци, которые в изотермических координатах имеют вид

$$K = -\frac{2}{A}\frac{\partial^2 \lg A}{\partial z\, \partial \zeta} = -\frac{1}{2}\nabla^2 \lg A, \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{1}{A}\frac{\partial AG}{\partial z}, \tag{6}$$

получим уравнения оболочки в смещениях.

В случае тонкой, достаточно пологой оболочки можно принять

$$\begin{aligned} S &= \frac{4Eh}{1+\sigma}\frac{1}{A}\left(-Gw + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right), \\ T &= \frac{2Eh}{1-\sigma}\frac{1}{A}(\theta - 2Hw), \\ P &= -\frac{8Eh^3}{3(1+\sigma)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \\ Q &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma)}\frac{1}{A}\nabla^2 w, \end{aligned} \tag{7}$$

где E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина оболочки, w — нормальное перемещение точки срединной поверхности, $V = V^1 + iV^2$, причем V^α — контравариантные составляющие вектора смещения вдоль срединной поверхности,

$$\theta = \frac{1}{A}\frac{\partial AV^1}{\partial x} + \frac{1}{A}\frac{\partial AV^2}{\partial y} = \frac{1}{A}\frac{\partial AV}{\partial z} + \frac{1}{A}\frac{\partial A\overline{V}}{\partial \zeta}. \tag{8}$$

Кроме того, в уравнении (2^1) можно отбросить члены, содержащие N, т. е. вместо (2^1) можем взять уравнение

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 S}{\partial z} + \frac{1}{A}\frac{\partial AT}{\partial \zeta} + X = 0. \tag{9}$$

Подставляя в (2^3) вместо P и Q их выражения (7), получим

$$N = -2D\frac{1}{A}\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \zeta} - 2D(1-\sigma)\frac{K}{A}\frac{\partial w}{\partial \zeta} + Y \quad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\right). \tag{10}$$

Подставляя теперь в (2^2) и (9) выражения N, S и T и полагая $X=Y=0$, получим

$$-D\nabla^2\nabla^2 w - 2D(1-\sigma)\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\partial}{\partial \zeta}K\frac{\partial w}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{4Eh}{1-\sigma^2}[(1+\sigma)K-2H^2]\,w+\frac{2Eh}{1+\sigma}\left(\overline{G}\frac{\partial V}{\partial \zeta}+G\frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{2Eh}{1-\sigma}H\theta+Z=0, \tag{11}$$

$$\frac{2}{1+\sigma}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}A\frac{\partial V}{\partial \zeta}+\frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}-\frac{2}{1+\sigma}\frac{1}{A}\frac{\partial AGw}{\partial z}-\frac{2}{1-\sigma}\frac{\partial Hw}{\partial \zeta}=0.$$

Такой вид имеет в изотермических координатах основная система уравнений тонкой пологой оболочки в компонентах смещения. Эту систему теперь легко можно записать относительной любой координатной системы.

Заметим, наконец, что из уравнения (11) можно выбросить второй член, содержащий K, так как в случае пологой оболочки он представляет собой незначительную величину по сравнению с остальными членами этого уравнения. Это равносильно тому, что для N взять выражение

$$N=-2D\frac{1}{A}\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial \zeta}. \tag{12}$$

Математический институт
Академии наук Груз.ССР

Получено
27 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. В. Колосов, Об одном приложении теории функции комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости, Юрьев 1909. [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, изд. АН СССР, 1935. [3] И. Н. Векуа, Приклади. матем. и мех., **9**, 368 (1945). [4] И. Н. Векуа, Приклади. матем. и мех., **11**, 499 (1947). [5] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948. [6] В. В. Новожилов, Изв. АН СССР, ОТН, № 1 (1946).