Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

В. М. АСТАФЬЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВЫХ ТУРБИН С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЛОПАСТЕЙ И ИХ ИНТЕГРАЛЫ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1949)

Моделирование потоков в лопаточных аппаратах абстрактной схемой потоков с бесконечно большим числом тонких лопастей обсуждалось еще в 1905—1907 гг. и было обосновано в 1907 г. Стодола (1). В настоящей статье дается новый вариант представления этой абстрактной модели, приводящий к новым результатам.

1. Криволинейные координаты, образующие систему вращения. Пусть прямая ox служит общей осью непрерывного семейства гладких непересекающихся поверхностей вращения $r_0=\text{const}$ и пусть семейство поверхностей $\varphi=\text{const}$ получается непрерывным вращением около оси ox гладкой поверхности $\varphi=c_0$. Если задать новую гладкую поверхность вращения $s=0$, соосную семейству $r_0=\text{const}$, но не принадлежащую ему, то конгруенция кривых $r_0=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ вместе с поверхностью $s=0$ определяет новое семейство поверхностей $s=\text{const}$, каждая из которых есть место концов дуг равной длины кривых конгруенции. Указанные три семейства поверхностей принимаем в качестве криволинейных координат. С каждой точкой $M(s, r_0, \varphi)$ связываем вектор $\overline{OM}=\mathbf{R}(s, r_0, \varphi)$. Этот вектор обладает следующими свойствами

$$\mathbf{R}'_\varphi=[\mathbf{i}\mathbf{R}], \quad \text{где } \mathbf{i} \text{ — орт оси } ox, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathbf{R}^{(k_1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}}, \quad \mathbf{R}^{(k_2)}_{\beta_1\ldots\beta_{k_2}}\right)\equiv 0, \tag{2}$$

где $\alpha_1, \ldots \alpha_{k_1}$, $\beta_1, \ldots \beta_{k_2}$ — любые буквы из числа s, r_0, φ,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathbf{R}'_s, \mathbf{R}'_{r_0}, \mathbf{R}'_\varphi)\equiv 0. \tag{3}$$

2. Уравнения потока в координатах s, r_0, φ со связями $\varphi=\text{const}$. Относим идеальный сжимаемый установившийся поток с бесконечно большим числом связей (лопастей), вращающихся около оси ox с постоянной угловой скоростью ω, к системе $\mathbf{R}(s, r_0, \varphi)$, в которой поверхностями $\varphi=\text{const}$ являются связи потока, а поверхностями $r_0=\text{const}$ — поверхности тока, опирающиеся на параллели переднего среза турбины ($s=0$) в предположении, что параметры потока на поверхности $s=0$ зависят только от r_0. Если реакцию

связи, отнесенную к единице объема, представить в виде $\lambda_\varphi \operatorname{grad} \varphi$ то основное уравнение потока в проекциях на $\mathbf{R}'_s$, $\mathbf{R}'_{r_0}$, $\mathbf{R}'_\varphi$ дает

$$w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -\omega^2 (\mathbf{R}''_{\varphi\varphi}, \mathbf{R}'_s), \tag{4}$$

$$w \frac{\partial}{\partial s} (w\mathbf{R}'_s, \mathbf{R}'_{r_0}) + \omega^2 (\mathbf{R}''_{\varphi\varphi}, \mathbf{R}'_{r_0}) + 2\omega w (\mathbf{i}, \mathbf{R}'_s, \mathbf{R}'_{r_0}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_0} = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_\varphi = \rho w \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (w\mathbf{R}'_s, \mathbf{R}'_\varphi) + 2\omega (\mathbf{i}, \mathbf{R}'_s, \mathbf{R}'_\varphi) \right\}, \tag{6}$$

где w — скорость, ρ — плотность, p — давление.

Уравнение неразрывности приводится к виду

$$\rho w \Delta = \rho_0 w_0 \Delta_0, \quad \text{где } \Delta = (\mathbf{R}'_s, \mathbf{R}'_{r_0}, \mathbf{R}'_\varphi). \tag{7}$$

Уравнение (4), в силу уравнения (1), всегда дает интеграл, обобщающий интеграл Бернулли на потоки с вращающимися связями

$$w^2 - w_0^2 + 2 \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \, d\rho = \omega^2 (r^2 - r_0^2), \tag{8}$$

где r — радиус параллели, соответствующей дуге s на поверхности $r_0 = \text{const}$. Очевидно, что при $\omega = 0$ уравнения (5)—(8) соответствуют потоку с неподвижными связями, а при $\omega = 0$, $\lambda_\varphi = 0$ — потоку свободному. В последнем случае уравнение (6) дает интеграл, выражающий постоянство циркуляции потока на поверхностях $r_0 = \text{const}$. Именно,

$$(\mathbf{w}, \mathbf{R}'_\varphi) = c(r_0). \tag{9}$$

3. Уравнения неподвижной лопасти, реализующей линейчатые потоки. В рассматриваемом случае семейство $r_0 = \text{const}$ является семейством соосных однополостных гиперболоидов. За поверхность $s = 0$ примем поверхность горловых кругов семейства $r_0 = \text{const}$. Пусть $x = a(r_0)$ — уравнение меридиана поверхности $s = 0$; $b(r_0)$ — мнимая полуось гиперболоида с горловым кругом радиуса r_0; $\theta = \theta(r_0)$ — уравнение в полярных координатах проекции на плоскость, перпендикулярную оси ox (плоскость yoz), линии пересечения связи $\varphi = \varphi_0$ с поверхностью $s = 0$; s — расстояние, измеряемое по образующим гиперболоидов от поверхности горловых кругов; γ — угол наклона этих образующих с осью ox. Тогда лопасть $\varphi = \varphi_0$, реализующая все линейчатые потоки из числа потоков, образующих систему вращения, представится уравнениями

$$\begin{gathered} x = a(r_0) + \frac{s b(r_0)}{\sqrt{b^2(r_0) + r_0^2}}, \\ y = r_0 \cos[\varphi_0 + \theta(r_0)] + \frac{s r_0}{\sqrt{b^2(r_0) + r_0^2}} \sin[\varphi_0 + \theta(r_0)], \\ z = \frac{s r_0}{\sqrt{b^2(r_0) + r_0^2}} \cos[\varphi_0 + \theta(r_0)] - r_0 \sin[\varphi_0 + \theta(r_0)], \end{gathered} \tag{10}$$

где для случая, когда γ зависит от r_0, функции a, b и θ определяются уравнениями

$$a(r_0) = c_1 + \frac{m}{2k} \ln \frac{ce^{kr_0^2/2} - 1}{ce^{kr_0^2/2} + 1}, \quad b(r_0) = \frac{r_0}{\sqrt{c^2 e^{kr_0^2} - 1}},$$
$$\theta(r_0) = m \int^{r_0} \frac{ce^{kr^2/2}\, dr}{(c^2 e^{kr^2} - 1)^{3/2}}, \tag{11}$$

в которых c, c_1, k, m — произвольные постоянные, причем $c \geqslant 1$, $k \neq 0$, а для случая $\gamma = \text{const} = \gamma_0$ — уравнениями

$$a(r_0) = \tilde{c} r_0^2 + \tilde{c}_1, \quad b(r_0) = \tilde{\tilde{c}} r_0, \quad \theta(r_0) = 2\tilde{c}\, \tilde{\tilde{c}} r_0, \tag{11'}$$

где $\tilde{c}, \tilde{c}_1, \tilde{\tilde{c}}$ — произвольные постоянные, причем $\tilde{c} = \text{ctg}\, \gamma_0$.

Для линейчатых потоков имеет место равенство

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = ks^2 - ms + 1, \tag{12}$$

что вместе с уравнениями (7), (8) определяет параметры потока w и ρ.

4. Уравнения потока в цилиндрических координатах. Пересчет уравнений (5)—(8) к цилиндрическим координатам x, r, φ, в предположении, что x, r, φ — функции времени t и радиуса r_0 начальной параллели, а x и φ — функции, кроме того, своих начальных значений x_0, φ_0, приводит к системе

$$\dot{x}^2 + \dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi}^2 - \omega^2) + 2\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho}\, d\rho = C_1(r_0),$$

$$\frac{D(x, \dot{x})}{D(t, r_0)} + \frac{D(r, \dot{r})}{D(t, r_0)} + r^2 \frac{D(\varphi, \dot{\varphi})}{D(t, r_0)} + 2r(\dot{\varphi} + \omega) \frac{D(\varphi, r)}{D(t, r_0)} = \frac{1}{2} C_1'(r_0), \tag{13}$$

$$\rho r \frac{D(x, r)}{D(t, r_0)} = C_2(r_0), \quad \lambda_{\varphi_0} = \rho \frac{2\dot{r}(\dot{\varphi} + \omega) + r\ddot{\varphi}}{\dfrac{D(x, r)}{D(t, r_0)}},$$

где буквы с точками означают производные по времени, а $C_1(r_0)$ и $C_2(r_0)$ определяются по состоянию потока при $t = 0$. Уравнения (13) предполагают, что связями потока являются поверхности $\varphi_0 = \text{const}$.

5. Уравнения вращающейся лопасти, реализующей адиабатический поток, равномерный вдоль оси. Под потоком, равномерным вдоль оси, подразумевается поток, осевая составляющая скорости которого и плотность являются функциями только времени. Приводимый ниже интеграл получен из системы уравнений (13) при дополнительных условиях, что натекающий на лопасть поток параллелен оси и что угловая составляющая скорости потока $\dot{\varphi}$ зависит только от времени. При таких условиях искомая лопасть получается линейчатой. Ее уравнения имеют вид

$$x = \int_0^t \dot{x}\, dt, \quad r = \sqrt{4\omega^2 t^2 + 1}\, r_0, \quad \varphi = \omega t - \text{arc tg}(2\omega t) + \varphi_0, \tag{14}$$

где $\dot{x}$ — корень уравнения

$$\dot{x}^{n+1} - \left(\dot{x}_0^2 + 2C_0 \frac{n}{n-1} \rho_0^{n-1}\right) \dot{x}^{n-1} + 2C_0 \frac{n}{n-1} \frac{(\rho_0 \dot{x}_0)^{n-1}}{(4\omega^2 t^2 + 1)^{n-1}} = 0. \tag{15}$$

Так как время t из уравнения (15) выражается явно через $\dot{x}$, то функции x, r, φ можно пересчитать к параметру $\dot{x}$, что обеспечивает возможность их законченного аналитического представления. Состояние потока определяется уравнениями

$$\rho = \frac{\rho_0 \dot{x}_0}{(4\omega^2 t^2 + 1)\,\dot{x}}, \quad p = C_0 \rho^n. \tag{16}$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Stodola, Zs. f. das gesammte Turbinenwesen, 245 (1907).