Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

ТЕОРЕМА ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА — ФОКА

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 25 VI 1949)

В работах ([1], [2]) показано, что, при выполнении некоторых условий, имеют место взаимные формулы

$$G(\tau)=\int_1^\infty g(x)p(x,\ \tau)\,dx, \qquad g(x)=\int_0^\infty G(\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$p(x,\ \tau)=\sqrt{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}\,P_{-1/2+i\tau}(x),$$

где $P_\nu(x)$ — сферическая функция Лежандра.

Целью настоящей заметки является вывод соотношения, представляющего теорему Парсеваля для преобразования рассматриваемого вида. Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $g(x)$ — *произвольная вещественная функция, такая, что*: 1) $g(x)x^{-1/2}\lg(1+x)\in L(1,\ \infty)$, 2) $g(x)\in L_2(1,\infty)$, $G(\tau)$ — *преобразование* $g(x)$, *определенное формулой* (1). *Тогда*

$$\int_0^\infty [G(\tau)]^2\,d\tau=\int_1^\infty [g(x)]^2\,dx. \tag{2}$$

Доказательство теоремы получается путем рассмотрения интеграла

$$D(\delta)=\int_0^\infty [G(\tau)]^2\,\frac{d\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\delta\tau}, \tag{3}$$

где δ — положительное число, которое может быть произвольно малым. Из оценки $|P_{-1/2+i\tau}(x)|\leqslant P_{-1/2}(x)$ следует, что $G(\tau)$ существует, как интеграл Лебега, и представляет непрерывную функцию, если $g(x)P_{-1/2}(x)\in L(1,\ \infty)$, что эквивалентно более простому условию 1). Далее, на тех же основаниях, тройной интеграл, появляющийся после подстановки $G(\tau)$ в (3), сходится абсолютно. Поэтому интеграл (3) существует и может быть представлен в виде

$$D(\delta)=\int_1^\infty\int_1^\infty g(x)g(y)\,dx\,dy\int_0^\infty p(x,\tau)p(y,\ \tau)\,\frac{dt}{\mathrm{ch}\,\pi\delta\tau}=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(\xi)\,\Phi(\eta)\,\Psi(\xi,\ \eta,\ \delta)\,d\xi\,d\eta, \tag{4}$$

где положено $\Phi(\xi) = \sqrt{\operatorname{sh}\xi}\, g(\operatorname{ch}\xi)$ и

$$\Psi(\xi, \eta, \delta) = \sqrt{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta} \int\limits_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\eta)}{\operatorname{ch}\pi\delta\tau} d\tau. \tag{5}$$

Используя интегральное представление для произведения сферических функций *

$$\operatorname{th}\pi\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\eta) \sqrt{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\xi-\eta|}^{\xi+\eta} P_{-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta - \operatorname{ch} s}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta}\right) \sin\tau s\, ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{\xi+\eta}^{\infty} Q_{-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta}\right) \sin\tau s\, ds \tag{6}$$

($Q_\nu(x)$ — сферическая функция 2-го рода), имеем:

$$\Psi(\xi, \eta, \delta) = -\frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_{|\xi-\eta|}^{\xi+\eta} P_{-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta - \operatorname{ch} s}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta}\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}}\right) ds -$$

$$- \frac{1}{\pi^2\delta} \int\limits_{\xi+\eta}^{\infty} Q_{-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta}\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}}\right) ds. \tag{7}$$

Интегрирование по частям позволяет преобразовать последнюю формулу к виду:

$$\Psi(\xi, \eta, \delta) = \frac{1}{2\pi\delta \operatorname{ch}\frac{\xi-\eta}{2\delta}} - \frac{1}{2\pi\delta \operatorname{ch}\frac{\xi+\eta}{2\delta}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_{|\xi-\eta|}^{\xi+\eta} P'_{-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta - \operatorname{ch} s}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta}\right) \frac{\operatorname{sh} s}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}} - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\xi+\eta}{2\delta}}\right) ds -$$

$$- \frac{1}{\pi^2\delta} \int\limits_{\xi+\eta}^{\infty} Q'_{-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta}\right) \frac{\operatorname{sh} s}{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sh}\eta} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\xi+\eta}{2\delta}} - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}}\right) ds =$$

$$= \Psi_1 - \Psi_2 - \Psi_3 - \Psi_4. \tag{8}$$

Подставляя Ψ в (4), находим

$$D(\delta) = D_1 - D_2 - D_3 - D_4, \tag{9}$$

где D_i получается из D заменой Ψ на Ψ_i.

Сходимость (абсолютная) каждого из интегралов D_i может быть обоснована с помощью применения неравенства Буняковского — Шварца для двойных интегралов, если учесть симметрию функций Ψ_i относительно (ξ, η) и условие $\Phi(\xi) \in L_2(0, \infty)$, вытекающее из 2) **.

* Это интегральное представление получено автором и является, повидимому, новым.

** См., например, оценку D_3.

Мы имеем теперь

$$D_1 = \frac{1}{2\pi\delta}\int_0^\infty \Phi(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \Phi(\eta)\frac{d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\xi-\eta}{2\delta}} = \frac{1}{2\pi\delta}\int_0^\infty \Phi(\xi)\,d\xi \int_{-\xi}^\infty \Phi(\xi+t)\frac{dt}{\operatorname{ch}\frac{t}{2\delta}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch}\frac{t}{2\delta}}\,dt, \tag{10}$$

где

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) f(\xi+t)\,d\xi,$$

$$f(\xi) = \Phi(\xi) \text{ для } \xi \geqslant 0, \quad f(\xi) = 0 \text{ для } \xi < 0. \tag{11}$$

Из условия $f(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$ следует (([3]), стр. 398, пример 20), что $\varphi(t)$ — ограниченная и непрерывная функция, откуда легко получается, что

$$\lim_{\delta\to 0} D_1 = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi)]^2\,d\xi = \int_0^\infty [\Phi(\xi)]^2\,d\xi = \int_1^\infty [g(x)]^2\,dx. \tag{12}$$

Также несложно показать, что

$$\lim_{\delta\to 0} D_2 = 0. \tag{13}$$

Для оценки интеграла D_3 воспользуемся неравенством Буняковского — Шварца, что дает

$$|D_3| \leqslant \int_0^\infty [\Phi(\xi)]^2\,d\xi \int_0^\infty |\Psi_3|\,d\eta. \tag{14}$$

На основании явного выражения для Ψ_3 (8) и неравенства $|P'_{-1/2}(x)| \leqslant A(1+x)^{-1}$ (A — абсолютная постоянная), справедливого для всех $-1 \leqslant x \leqslant 1$, находим*:

$$\int_0^\infty |\Psi_3|\,d\eta \leqslant \frac{A}{2\pi\delta}\int_0^\infty d\eta \int_{|\xi-\eta|}^{\xi+\eta} \frac{\operatorname{sh} s}{[\operatorname{ch}(\xi+\eta) - \operatorname{ch} s]}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{2\delta}} - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\xi+\eta}{2\delta}}\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A}{\pi\delta}\int_0^\xi \operatorname{cth} u\,du \int_\xi^\infty \frac{\operatorname{sh}\frac{v}{2\delta}\operatorname{sh}\frac{u}{2\delta}}{\operatorname{ch}\frac{u}{\delta} + \operatorname{ch}\frac{v}{\delta}}\,dv = \frac{2A}{\pi}\int_0^\xi \operatorname{cth} u \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sh}\frac{u}{2\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\xi}{2\delta}}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A}{\pi \operatorname{ch}\frac{\xi}{2\delta}}\int_0^\xi \operatorname{cth} u \operatorname{sh}\frac{u}{2\delta}\,du = \frac{4A\delta}{\pi \operatorname{ch}\frac{\xi}{2\delta}}\int_0^{\xi/2\delta} \operatorname{cth} 2\delta y \operatorname{sh} y\,dy. \tag{15}$$

Принимая во внимание, что $2\delta \operatorname{cth} 2\delta y \operatorname{th} y \leqslant 1$ при $2\delta < 1$, имеем

$$\int_0^\infty |\Psi_3|\,d\eta \leqslant \frac{2A}{\pi\, ch\frac{\xi}{2\delta}}\int_0^{\xi/2\delta} \operatorname{ch} y\,dy = \frac{2A}{\pi}\operatorname{th}\frac{\xi}{2\delta} \leqslant \frac{2A}{\pi}. \tag{16}$$

---

* Для преобразования интеграла используется подстановка $\frac{1}{2}(\xi+\eta-s) = u$, $\frac{1}{2}(\xi+\eta+s) = v$.

С другой стороны, замечая, что $\operatorname{cth} 2\delta y \operatorname{sh} y \leqslant \operatorname{cth}\frac{\xi}{2}\operatorname{sh}\frac{\xi}{4\delta}$ при $0 \leqslant y \leqslant \frac{\xi}{4\delta}$ и $\operatorname{cth} 2\delta y \leqslant \operatorname{cth}\frac{\xi}{2}$ при $y \geqslant \frac{\xi}{4\delta}$, находим *:

$$\int_0^\infty |\Psi_3| d\eta \leqslant \frac{4A\delta}{\pi \operatorname{ch}\frac{\xi}{2\delta}}\left[\int_0^{\xi/4\delta} \operatorname{cth}\frac{\xi}{2}\operatorname{sh}\frac{\xi}{4\delta} dy + \int_{\xi/4\delta}^{\xi/2\delta} \operatorname{cth}\frac{\xi}{2}\operatorname{sh} y\, dy\right] \leqslant B\delta \operatorname{cth}\frac{\xi}{2}, \qquad (17)$$

где B — абсолютная постоянная.

Из (14), (16) и (17) следует:

$$|D_3| \leqslant \frac{2A}{\pi}\int_0^a [\Phi(\xi)]^2 d\xi + B\delta \operatorname{cth}\frac{a}{2}\int_a^\infty [\Phi(\xi)]^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A}{\pi}\int_0^a [\Phi(\xi)]^2 d\xi + B\delta \operatorname{cth}\frac{a}{2}\int_0^\infty [\Phi(\xi)]^2 d\xi. \qquad (18)$$

Так как $\Phi(\xi) \in L_2(0, \infty)$, можно выбрать такое малое $a = a(\xi)$, что первый интеграл будет меньше $^1/_2\,\varepsilon$. После этого можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что второй интеграл будет не превосходить $^1/_2\,\varepsilon$ при $\delta \leqslant \delta(\varepsilon)$. Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} D_3 = 0. \qquad (19)$$

Аналогично с помощью оценки $|Q'_{-1/2}(x)| \leqslant Cx^{-1/2}(x-1)^{-1}$ $(x \geqslant 1$, C — абсолютная постоянная) доказывается, что

$$\lim_{\delta \to 0} D_4 = 0. \qquad (20)$$

Из (12), (13), (19) и (20) заключаем:

$$\lim_{\delta \to 0} D(\delta) = \lim_{\delta \to 0}\int_0^\infty [G(\tau)]^2 \frac{d\tau}{\operatorname{ch}\pi\delta\tau} = \int_1^\infty [g(x)]^2 dx. \qquad (21)$$

Требуемый результат (2) вытекает теперь из известной теоремы ([3] стр. 346, 10.82).

Из теоремы 1 следует более общая

Теорема 2. *Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — произвольные вещественные функции, удовлетворяющие условиям* 1) *и* 2), $G_1(\tau)$ *и* $G_2(\tau)$ — *интегральные преобразования Мелера для этих функций. Тогда*

$$\int_0^\infty G_1(\tau) G_2(\tau)\, dt = \int_1^\infty g_1(x) g_2(x)\, dx. \qquad (22)$$

Пример. Пусть $g(x) = x^{-3/2}$. Тогда $G(\tau) = \dfrac{\sqrt{2\tau \operatorname{th}\pi\tau}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}}$ и

$$2\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi\tau}{2}} d\tau = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2},$$

что легко проверить непосредственно.

Поступило
20 VI 1949

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. G. Mehler, Math. Ann., 18 (1881). [2] В. А. Фок, ДАН, 39, № 7 (1943). [3] E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Oxford, 1932.

* $x \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} 2x$ ограничено при $x \geqslant 0$.