Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. С. ЕСЕНИН-ВОЛЬПИН

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЛОКАЛЬНЫМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЕСОМ В ДИАДИЧЕСКИХ БИКОМПАКТАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VII 1949)

Диадическим бикомпактом называется бикомпакт, являющийся непрерывным образом D_τ, определяемого как топологическое произведение τ двуточечных бикомпактов, где τ — некоторая мощность. Точками D_τ можно считать предикаты (т. е. функции, могущие принимать лишь значения 0 и 1), определенные на множестве индексов T мощности τ; значение предиката p на индексе α_i называется α_i-й координатой точки p; топология в D_τ задается посредством окрестностей вида $U_{\alpha_1\cdots\alpha_s}^{x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_s}}$, именуемых каноническими и являющихся совокупностями всех предикатов, принимающих на α_i значение x_{α_i} — множество $\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}$ конечно или пусто, его элементы называются фиксированными индексами окрестности $U_{\alpha_1\cdots\alpha_s}^{x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_s}}$, а сама эта окрестность s-координатной; если она содержит точку y, мы будем ее также обозначать $U_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(y)$.

Локальным весом пространства в точке a называется наименьшее количественное число λ_a такое, что существует семейство из λ_a окрестностей точки a такое, что во всякой окрестности точки a содержится окрестность из этого семейства. Весом пространства называется наименьшее количественное число τ такое, что существует семейство из τ окрестностей пространства, причем любое непустое открытое множество является суммой окрестностей из этого семейства. Характером количественного числа μ называется наименьшее количественное число $\chi(\mu)$ такое, что μ является суммой $\chi(\mu)$ чисел меньших μ.

О диадических бикомпактах мною были доказаны в 1946 г. следующие две теоремы.

Теорема 1. *Вес диадического бикомпакта, состоящего из бесконечного множества точек, равен верхней грани значений локального веса в его точках.*

В частности, диадический бикомпакт с первой аксиомой счетности метризуем.

Теорема 2. *Если вес диадического бикомпакта имеет несчетный характер, то в этом бикомпакте имеется точка, локальный вес которой равен весу пространства.*

Пусть A — замкнутое подмножество D_τ; назовем канонической окрестностью A сумму $\bigcup\limits_{b\in A} U_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(b) = V_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(A)$, причем $V_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(A)$ будем называть правильным представлением канонической окрестности A, если ни для какой правильной части $\{\alpha_i, \ldots, \alpha_j\}$

множества индексов $\{\alpha_1, \ldots \alpha_s\}$ равенство $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(A) = V_{\alpha_i \ldots \alpha_j}(A)$ не имеет места. Всякая каноническая окрестность имеет правильное представление. Легко видеть, что во всякой окрестности A содержится некоторая его каноническая окрестность, а также то, что если $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(A)$ есть правильное представление канонической окрестности A и множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ не содержится в множестве $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_t\}$, то $V_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_t}(A)$ не содержится в $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(A)$.

Будем называть индекс α внутренним для A, если он принимает участие в записи правильного представления некоторой канонической окрестности A, в противном случае будем называть α внешним индексом для A.

Легко доказываются следующие три утверждения:

1) Если $x \in A$, то любая точка y, отличающаяся от x только на индексах, внешних для A, также принадлежит A.

2) Если наряду с любой точкой $x \in A$ в A входит любая точка y, отличающаяся от x только на индексах, принадлежащих некоторому множеству E, то все индексы из E являются внешними для A.

3) Если A_1 и A_2 — два замкнутых подмножества D_τ, $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(A_1) = V_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(A_2)$, $\{\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_s\}$ — непустое множество индексов, не содержащихся среди $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$ и внешних для A_1, и $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_q \alpha_{q+1} \ldots \alpha_s}(A_2)$ — правильное представление канонической окрестности A_2, то A_1 не содержится в $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_q \alpha_{q+1} \ldots \alpha_s}(A_2)$.

Пусть R — диадический бикомпакт и $R = f(D_\tau)$, где f — непрерывное отображение. Из изложенного легко следует, что если A — полный прообраз в D_τ точки $a \in R$, локальный вес в которой равен λ_a, то множество внутренних индексов для A имеет мощность λ_a, если λ_a бесконечно, и конечно, если $\lambda_a = 1$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей лемме.

Лемма. *Φ — бесконечное множество полных прообразов в D_τ точек $P \subseteq R$, причем $\sup_{a \in P} \lambda_a \geqslant \aleph_0$ и для любого элемента Φ множество внутренних индексов имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$; тогда множество всех индексов, внутренних хотя бы для одного элемента Φ, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Доказательство. Допустим противное. Обозначим $\sup_{a \in P} \lambda_a = \aleph_\lambda$, тогда $\mu = \aleph_{\lambda+1}$ есть несчетная регулярная мощность и $\mu \leqslant p$, где p — мощность множества индексов, внутренних хотя бы для одного элемента Φ.

Моя ближайшая цель состоит в том, чтобы найти такую последовательность элементов Φ: $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots (\xi < \mu)$, каждый член A_ξ которой имеет каноническую окрестность, не содержащую никакого A_η при $\eta < \xi$.

Прежде всего, опираясь на регулярность μ и неравенство $\mu \leqslant p$, легко построить последовательность элементов Φ: $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots$ $(\xi < \mu)$ такую, что каждый член ее A_ξ имеет некоторую каноническую окрестность, допускающую правильное представление $V_{\alpha^\xi_1 \ldots \alpha^\xi_{s^\xi}}(A_\xi) = W^{0,\xi}_{\alpha^\xi_1 \ldots \alpha^\xi_{s^\xi}}$, причем некоторые из α^ξ_i, $i = 1, \ldots, s^\xi$, являются внешними индексами для любого A_η, $\eta < \xi$; переходя к подпоследовательности $A^0_0, A^0_1, \ldots, A^0_\xi, \ldots (\xi < \mu)$, можно считать, что все $s^\xi = r$.

Предположим, что имеется последовательность элементов Φ: $A^i_0, A^i_1, \ldots, A^i_\xi, \ldots (\xi < \mu)$, каждый член A^i_ξ которой обладает канонической окрестностью с r-координатным правильным представлением

$W^{i,\xi}_{\alpha^\xi_1\ldots\alpha^\xi_r}$, среди $\{\alpha^\xi_1, \ldots, \alpha^\xi_r\}$ имеется хоть один индекс, внешний для всех A^i_η, $\eta < \xi$, и существует система $\{\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_{q^i}\}$, содержащаяся в любом $\{\alpha^\xi_1, \ldots, \alpha^\xi_r\}$, такая, что все $V_{\bar\alpha_1\ldots\bar\alpha_{q^i}}(A^i_\xi)$ совпадают, причем $0 \leqslant q^i < r$. Обозначим через $\tilde\alpha^\xi_{q^i+1}, \ldots, \tilde\alpha^\xi_r$ те $\alpha^\xi_1, \ldots, \alpha^\xi_r$, которые не содержатся среди $\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_{q^i}$.

Возможны два случая:

1. Для любого ξ найдется $\bar\xi$ такое, что все $\tilde\alpha^{\bar\xi}_{q^i+1}, \ldots, \tilde\alpha^{\bar\xi}_r$ суть внешние индексы для всех A^i_η, $\eta < \xi$. Строим подпоследовательность $A^i_{\varphi_0}, A^i_{\varphi_1}, \ldots, A^i_{\varphi_\xi}, \ldots$ $(\xi < \mu)$ по закону: $\varphi_0 = 0$; если $\varphi_\alpha = \sigma_\alpha$, то $\varphi_{\alpha+1} = \bar\sigma_\alpha$, и если $\varphi_\alpha = \rho_\alpha$ для всех $\alpha < \beta < \mu$, то $\varphi_\beta = \overline{\sup_{\alpha<\beta} \rho_\alpha}$. Тогда, в силу 3), достигнута наша ближайшая цель.

2. Найдется такое ξ, что при любом $\zeta > \xi$ некоторые из $\tilde\alpha^\zeta_{q^i+1}, \ldots, \tilde\alpha^\zeta$ суть внутренние индексы хотя бы для одного A^i_η, $\eta \leqslant \xi$, — в силу регулярности μ можно перейти к подпоследовательности $A^{i+1}_0, A^{i+1}_1, \ldots, A^{i+1}_\xi, \ldots (\xi < \mu)$ того же типа, что и сама последовательность $A^i_0, A^i_1, \ldots, A^i_\xi, \ldots (\xi < \mu)$ — причем $q^i < q^{i+1} < r$. Рассуждая по индукции от $i = 0$, не позднее чем на r-м шаге встретим 1-й случай и будет достигнута наша ближайшая цель.

Так как во всякой окрестности любого элемента $A \in \Phi$ содержится полный прообраз некоторой окрестности точки $a = f(A)$, то каждый член A_ξ построенной последовательности $A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots (\xi < \mu)$ имеет окрестность $B(A_\xi)$, не пересекающуюся ни с каким A_η, $\eta < \xi$.

Выберем в каждом A_ξ по точке $b_\xi \in A_\xi$ и фиксируем $U_{\beta^\xi_1\ldots\beta^\xi_{l^\xi}}(b_\xi) \subseteq B(A_\xi)$. В силу несчетности и регулярности μ можно перейти к подпоследовательности $A^0_0, A^0_1, \ldots, A^0_\xi, \ldots (\xi < \mu)$ таким образом, что все $l^\xi = t$; каждая $U_{\beta^\xi_1\ldots\beta^\xi_t}(b^0_\xi)$ не пересекается ни с каким A_η, $\eta < \xi$.

Пусть имеется последовательность $A^i_0, \ldots, A^i_\xi, \ldots$ $(\xi < \mu)$, в каждом A^i_ξ выбрано по точке $b^i_\xi \in A^i_\xi$, у каждой b^i_ξ имеется t-координатная окрестность $U_{\beta^\xi_1\ldots\beta^\xi_t}(b^i_\xi)$, не пересекающаяся ни с каким A^i_η, $\eta < \xi$, и имеются $0 \leqslant v^i \leqslant t$ индексов $\beta_1, \ldots, \beta_{v^i}$, содержащихся среди любой группы индексов $\{\beta^\xi_1, \ldots, \beta^\xi_t\}$, причем значения координат с индексами β_j, $j, = 1, \ldots, v^i$, совпадают у всех b^i_ξ. Обозначим все β^ξ_i, не содержащиеся среди β_j, через $\tilde\beta^\xi_{v^i+1}, \ldots, \tilde\beta^\xi_t$. В силу 1) легко видеть, что при любом $\xi > 0$ хоть один из этих индексов будет внутренним для A_0. Опираясь на регулярность μ, мы сумеем перейти к подпоследовательности $A^{i+1}_0, \ldots, A^{i+1}_\xi, \ldots (\xi < \mu)$ того же типа, что и сама последовательность $A^i_0, \ldots, A^i_\xi, \ldots (\xi < \mu)$, причем $v^{i+1} = v^i + 1$. Рассуждая по индукции от $i = 0$, не более чем через t шагов построим последовательность $A^k_0, \ldots, A^k_\xi, \ldots (\xi < \mu;\ k \leqslant t)$, в каждом A^k_ξ будет выбрано по точке b^k_ξ, у каждой b^k_ξ будет существовать $U_{\beta^\xi_1\ldots\beta^\xi_t}(b^k_\xi)$, не пересекающаяся ни с каким A^k_η, $\eta < \xi$, и все $U_{\beta^\xi_1\ldots\beta^\xi_t}(b^k_\xi)$ будут совпадать. Но тогда b^k_0 содержится в A^k_0 и в любой $U_{\beta^\xi_1\ldots\beta^\xi_t}(b^k_\xi)$, $\xi > 0$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть $\mathfrak{n}$ — вес бесконечного диадического бикомпакта $R = f(D_\tau)$; нетрудно видеть, что множество индексов, внутренних для прообраза в D_τ хотя бы одной точки R, имеет мощность не меньшую, чем $\mathfrak{n}$. Отсюда, в силу доказанной леммы, немедленно следует справедливость теоремы 1.

Пусть теперь $R = f(D_\tau)$ — диадический бикомпакт веса τ, τ имеет несчетный характер; допустим, что локальный вес в каждой точке R меньше τ, а в какой-нибудь неизолированной точке R равен λ.

Обозначим через $K_\mathfrak{m}$ совокупность полных прообразов точек R, локальный вес в которых $\leqslant \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \geqslant \lambda$, и через $L_\mathfrak{m}$ сумму всех элементов $K_\mathfrak{m}$. По доказанной лемме, множество $E_\mathfrak{m}$ индексов, внутренних хотя бы для одного элемента $K_\mathfrak{m}$, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — упорядоченное по типу $\chi(\tau)$ множество мощностей $< \tau$ и сходящихся к τ. Из допущения следует, что $D_\tau = \bigcup\limits_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} L_\mathfrak{m}$; из $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}''$ следует $K_{\mathfrak{m}'} \subseteq K_{\mathfrak{m}''}$ и $L_{\mathfrak{m}'} \subseteq L_{\mathfrak{m}''}$. При $\mathfrak{m} < \tau$ $\overline{L}_\mathfrak{m} \neq D_\tau$*. В самом деле, индексы, не входящие в $E_\mathfrak{m}$, суть внешние для $\overline{L}_\mathfrak{m}$; далее, если $C \subseteq \overline{L}_\mathfrak{m}$ есть пересечение всех канонических окрестностей точки из $\overline{L}_\mathfrak{m}$ с фиксированными индексами из $E_\mathfrak{m}$, то C не может пересекаться с полными прообразами двух различных точек a и b, что устанавливается при помощи рассмотрения непересекающихся окрестностей этих точек и утверждения 1); наконец, в силу теоремы 1, найдется точка $b \in R$, локальный вес которой $> \mathfrak{m}$; ее полный прообраз не может содержаться в $\overline{L}_\mathfrak{m}$ в силу утверждения 2).

Обозначим через $\rho_\mathfrak{m}$ наименьшее такое $\sigma \in \mathfrak{M}$, что не имеет места $L_\sigma \subseteq \overline{L}_\mathfrak{m}$; пусть $q^\mathfrak{m} \in L_{\rho_\mathfrak{m}} - \overline{L}_\mathfrak{m}$ и выберем такую окрестность $U^\mathfrak{m}$ точки $q^\mathfrak{m}$, которая не пересекается с $\overline{L}_\mathfrak{m}$; мощность множества всех $U^\mathfrak{m}$ равна $\chi(\tau)$, следовательно, имеет несчетный характер; по теореме А. Н. Шанина ([1]) о калибрах, у него существует равномощная часть, имеющая непустое пересечение; очевидно, что любая точка этого пересечения не входит ни в какое $\overline{L}_\mathfrak{m}$; но $D_\tau = \bigcup\limits_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} L_\mathfrak{m}$. Это противоречие доказывает теорему 2.

Поступило
27 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. А. Шанин, Тр. Математ. ин-та им. Стеклова, 24 (1948).

* Сообщено мне А. Л. Лунцем.