Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 VII 1949)

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f(y_i^{(n)}),$$

$$\{\lambda_i^{(n)}\}_1^n > 0, \quad -1 \leqslant y_1^{(n)} < y_2^{(n)} < \ldots < y_n^{(n)} \leqslant 1, \tag{1}$$

справедливую для всех полиномов степени не выше M_n *. Мы покажем, как, зная поведение функции $\sigma(x)$ вблизи одного из концов отрезка, например левого, можно ограничить сверху степень точности M_n; мы обобщим наш прежний результат ([1]) и получим дальнейшее развитие методов и идей акад. С. Н. Бернштейна ([2]).

I. Рассмотрим полиномы $\{P_n(x)\}_0^\infty$, ортогональные относительно обложения $d\sigma(x)$; пусть

$$P_m(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k^{(m)}), \quad x_k^{(m)} = -\cos\theta_k^{(m)}, \quad 0 < \theta_1^{(m)} < \theta_2^{(m)} < \ldots < \theta_m^{(m)} < \pi; \tag{2}$$

введем неубывающую на отрезке $[0, \pi]$ функцию $\tau(\theta) = \sigma(-\cos\theta)$, и пусть $\theta_2^{(m)} \leqslant \omega(m)$, где функция $\omega(m)$, очевидно, убывает при возрастании m.

Теорема 1. *Если через z_n обозначить расстояние от левого конца отрезка $[-1\ +1]$ до ближайшей к нему, но не совпадающей с ним абсциссы формулы (1), то*

$$M_n < 2\omega^{-1}(\sqrt{2z_n}) \ **; \tag{3}$$

если же $y_1^{(n)} > -1$, $y_n^{(n)} < 1$, то

$$M_n' < 2\omega^{-1}\left[\tau^{-1}(\lambda_1^{(n)})\right]. \tag{4}$$

---

* $\sigma(x)$ — ограниченная неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста на $[-1, +1]$.

** F^{-1} означает функцию, обратную функции F.

Для доказательства рассматриваем квадратурную формулу Маркова [9] — Поссе [10]:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{g}_i^{(k)} f(u_i^{(k)}), \quad \{\bar{g}_i^{(k)}\}_1^k > 0,$$

$$\prod_{i=1}^{k} (x - u_i^{(k)}) = (x-1)^\alpha (x+1)^\beta \bar{P}_s(x) \tag{5}$$

со степенью точности $\bar{M}_n = 2s + \alpha + \beta - 1$, где $k = s + \alpha + \beta$, причем $\beta = 0$, если $y_1^{(n)} > -1$, и $\beta = 1$, если $y_1^{(n)} = -1$ *; полином $\bar{P}_s(x)$ ортогонален относительно обложения $d\bar{\sigma}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta d\sigma(x)$. Обозначая через y_n, u_k абсциссы квадратурных формул (1), (5), ближайшие к левому концу отрезка, легко находим $-1 < y_n < u_k$, аналогично [2] **; нетрудно показать, что абсциссы $\{u_i^{(k)}\}_1^k$ перемежаются с корнями полинома $P_{s+1}(x)$; отсюда

$$-1 < y_n < u_k < x_2^{(s+1)};$$

$$1 + y_n = z_n < 1 + x_2^{(s+1)} < \frac{1}{2}[\theta_2^{(s+1)}]^2 \leqslant \frac{1}{2}[\omega(s+1)]^2, \tag{6}$$

и окончательно

$$s + 1 < \omega^{-1}(\sqrt{2z_n}); \quad M_n \leqslant 2(s+1) < 2\omega^{-1}(\sqrt{2z_n}). \tag{7}$$

Пусть теперь $y_1^{(n)} > -1$, $y_n^{(n)} < 1$; положим $s = \left[\frac{M_n' + 1}{2}\right]$ и рассмотрим квадратурную формулу Гаусса, получающуюся из (5) при $\alpha = \beta = 0$; аналогично [2] находим, применяя неравенства Чебышева — Маркова,

$$-1 < y_1^{(n)} < x_1^{(s)};$$

$$\lambda_1^{(n)} \leqslant g_1^{(s)} < \sigma(x_2^{(s)} - 0) - \sigma(x_1^{(s)} + 0) < \sigma(x_2^{(s)}) = \tau(\theta_2^{(s)}), \tag{8}$$

откуда

$$\tau^{-1}(\lambda_1^{(n)}) < \theta_2^{(s)} \leqslant \omega(s); \quad s < \omega^{-1}[\tau^{-1}(\lambda_1^{(n)})]; \quad M_n' \leqslant 2s < 2\omega^{-1}[\tau^{-1}(\lambda_1^{(n)})]. \tag{9}$$

II. Рассмотрим теперь один простой метод нахождения функции $\omega(m)$; обозначим через e отрезок $[0, \varepsilon\pi]$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало; обозначим через $a(\tau; \delta)$ м о д у л ь р о с т а функции $\tau(\theta)$ на отрезке e ***, т. е.

$$a(\tau; \delta) = \inf \int_{\theta}^{\theta+\delta} d\tau(\theta), \quad \theta, \theta + \delta \in e; \tag{10}$$

---

* Аналогично определяем число α.

** Полагаем $M_n \leqslant \bar{M}_n + 1$.

*** См. [3–6].

будем предполагать, что $a(\tau;\,\delta)>0$ при $\delta>0$; введем также функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\lg\frac{2c_0}{a(\tau;\,x)},\quad x>0,\quad c_0=\int_{-1}^{1}d\sigma(x)=\int_0^{\pi}d\tau(\theta);\tag{11}$$

она, очевидно, не убывает при убывании x, причем $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\infty$.

Теорема 2. *Для достаточно больших значений m имеют место неравенства*

$$\theta_{\nu+1}^{(m)}-\theta_{\nu}^{(m)}\leqslant a\varphi^{-1}(m),\quad a<\frac{7}{1-\varepsilon},\quad \{\theta_i^{(m)}\}_1^r\in e\quad(\nu=0,1,\ldots,r-1),\tag{12}$$

откуда следуют неравенства

$$\theta_2^{(m)}\leqslant 2a\varphi^{-1}(m);\quad \omega(m)=2a\varphi^{-1}(m);\tag{13}$$

$$M_n<2\varphi(b\sqrt{z_n}),\quad b=\frac{1}{a\sqrt{2}};\quad M_n'<2\varphi[c\tau^{-1}(\lambda_1^{(n)})],\quad c=\frac{1}{2a}.$$

Для доказательства рассмотрим неотрицательный полином

$$2\rho(x)=\left\{\frac{\sin\frac{N(\gamma+\theta)}{2}}{N\sin\frac{\gamma+\theta}{2}}\right\}^{2p}+\left\{\frac{\sin\frac{N(\gamma-\theta)}{2}}{N\sin\frac{\gamma-\theta}{2}}\right\}^{2p},\quad x=-\cos\theta,\tag{14}$$

степени $p(N-1)$*; для достаточно больших значений m всегда найдутся корни (2) на отрезке e; положим $\gamma=\frac{1}{4}\{\theta_\nu^{(m)}+\theta_{\nu+1}^{(m)}\}$, где $\theta_{\nu+1}^{(m)}\in e$, $pN=2m$; совершенно аналогично (7) и (8) находим:

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)\,d\sigma(x)\leqslant c_0\left\{N\sin\frac{\theta_{\nu+1}^{(m)}-\theta_\nu^{(m)}}{4}\right\}^{-2p};\tag{15}$$

с другой стороны, при условии $\gamma\leqslant\theta\leqslant\gamma+\delta$, $\delta\leqslant\frac{\pi}{N}$ имеем $\rho(x)\geqslant\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p}$; поэтому при $\gamma+\delta\leqslant\pi\varepsilon$ имеем

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\rho(x)\,d\sigma(x)=\int_0^{\pi}\rho(-\cos\theta)\,d\tau(\theta)\geqslant\\ \geqslant\int_{\gamma}^{\gamma+\delta}\rho(-\cos\theta)\,d\tau(\theta)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p}a(\tau;\,\delta),\end{gathered}\tag{16}$$

откуда находим

$$\theta_{\nu+1}^{(m)}-\theta_\nu^{(m)}\leqslant\frac{\pi^2}{N}\left\{\frac{2c_0}{a(\tau;\,\delta)}\right\}^{N/4m},\quad \delta\leqslant\frac{\pi}{N}.\tag{17}$$

Подберем число δ из условия $\varphi(\delta)=m$, т. е. $\delta=\varphi^{-1}(m)$; тогда, по (11), имеем

$$\frac{N}{4m}\lg\frac{2c_0}{a(\tau;\,\delta)}\leqslant\frac{\pi}{4m\delta}\lg\frac{2c_0}{a(\tau;\,\delta)}=\frac{\pi}{4m}\varphi(\delta)=\frac{\pi}{4};\quad \theta_{\nu+1}^{(m)}-\theta_\nu^{(m)}\leqslant\frac{\pi^2}{N}e^{\pi/4}.\tag{18}$$

Положим $N=\left[\frac{\pi}{\delta}\right]$; так как $N\geqslant\frac{\pi}{\delta}-1$, $\delta\leqslant\pi\varepsilon-\gamma<\pi\varepsilon$, то

* p, N — целые положительные числа, которые мы в дальнейшем уточним.

$$\theta_{\nu+1}^{(m)} - \theta_\nu^{(m)} \leqslant \frac{\pi^2 e^{\pi/4}}{\frac{\pi}{\delta} - 1} < \frac{\pi e^{\pi/4}}{1-\varepsilon} \varphi^{-1}(m) = a\varphi^{-1}(m), \quad a < \frac{7}{1-\varepsilon}. \tag{19}$$

Примечание 1. Если $\varepsilon = 1$, т. е. $e = [0, \pi]$, то вместо (12) можем написать

$$\theta_{\nu+1}^{(m)} - \theta_\nu^{(m)} \leqslant \frac{\pi^2 e^{\pi/4} \varphi^{-1}(m)}{\pi - \varphi^{-1}(m)}. \tag{20}$$

Рассмотрим следующий частный случай, когда формулы (13) можно представить в более простом виде; пусть на отрезке e функция $\tau(\theta)$ подчинена условиям

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\tau_0(\theta) \leqslant \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\tau(\theta), \quad \tau(\theta) \leqslant k\tau_0(\theta), \quad \theta, \theta_1, \theta_2 \in e, \tag{21}$$

где неубывающая функция $\tau_0(\theta)$ удовлетворяет таким условиям:

$$a(\tau_0; \delta) = \tau_0(\delta)\ {}^*, \quad \tau_0(\lambda\theta) \geqslant A\tau_0(\theta), \quad \theta, \lambda\theta \in e, \quad A = A(\lambda); \tag{22}$$

тогда из (13) имеем

$$M_n < \frac{c_1 - c_2 \lg \tau_0(\sqrt{z_n})}{\sqrt{z_n}}; \quad M_n' < \frac{c_3 - c_4 \lg \lambda_1^{(n)}}{\tau_0^{-1}(\lambda_1^{(n)})}\ {}^{**}. \tag{23}$$

Пусть, в частности, $\tau_0(\theta) = \theta^s, s > 1$; тогда

$$M_n < \frac{c_1 - c_2 \lg z_n}{\sqrt{z_n}}; \quad M_n' < [\lambda_1^{(n)}]^{-1/s}\{c_3 - c_4 \lg \lambda_1^{(n)}\}; \tag{24}$$

если положить $z_n \geqslant 1/n$, или $\lambda_1^{(n)} \geqslant 1/n$, то

$$M_n < (c_1 + c_2 \lg n)\sqrt{n}; \quad M_n' < n^{1/s}(c_3 + c_4 \lg n). \tag{25}$$

В обоих случаях имеем $M_n = o(n)$; $M_n' = o(n)$; следовательно, *если на отрезке e функция $\tau(\theta)$ удовлетворяет* (21), *где* $\tau_0(\theta) = \theta^s$, *то ни формула типа Чебышева* $\left(\lambda_1^{(n)} = \frac{1}{n}\right)$, *ни формула типа Котеса* $\left(z_n = \frac{1}{n}\right)$ *не могут иметь места при условии* $\{M_n = n\}_1^\infty$ ***.

Примечание 2. Нетрудно показать, что в рассматриваемом частном случае имеем $\varphi^{-1}(m) \leqslant s\frac{\lg m}{m}$, откуда $1 + x_1^{(m)} = O\left(\frac{\lg^2 m}{m^2}\right)$; этот результат был известен при гораздо более ограничительных условиях, наложенных на функцию $\tau(\theta)$.

Поступило
23 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Л. Геронимус, ДАН, **65**, № 4 (1949). [2] С. Н. Бернштейн ДАН. **14**, № 6 (1937). [3] J. Shohat, Annali di Mat., **18**, 201 (1939). [4] J. Shohat, Am. Journ. Math., **55**, 218 (1933). [5] Я. Л. Героним ДАН, **44**, № 9 (1944). [6] Я. Л. Геронимус, Матем. сб., **23** (65), 1, 77 (1948). [7] P. Erdös and P. Turan, Ann. Math., **39**, № 4, 703 (1938). [8] G. Szegö, Orthogonal polynomials, N. Y., 1939. [9] А. А. Марков, Math. Ann., **25**, 427 (1885). [10] К. А. Поссе, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Спб., 1886. [11] Н. И. Ахиезер, Журн. Інст. Мат. УРСР, № 3, 75 (1937).

* В частности, это условие всегда выполнено, если функция $\tau_0(\theta)$ имеет на отрезке e положительную вторую производную.

** Числа $\{c_i\}_1^4$ не зависят от n.

*** Отсюда, как частный случай, получается результат Н. Ахиезера ([11]).