Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Действительный член Болгарской Академии наук Н. ОБРЕШКОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 7 V 1949)

В настоящей заметке исследуется асимптотическое поведение производных.

Пусть $f(x)$ есть действительная функция, которая в интервале (a, b) имеет $(n+1)$-ю производную, и пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные различные числа из этого интервала, причем x_0 — наименьшее (наибольшее) и x_n — наибольшее (наименьшее) из них. Для разделенного частного

$$\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}, \qquad F(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

имеем формулу

$$\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n x_0}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta), \tag{1}$$

где ζ — число между x_0 и x_n.

Положительная функция $\varphi(x)$, определенная для $x > a$, называется функцией правильного возрастания ([1-3]) для этих значений x, если для всякого $\lambda > 0$ имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \lambda^m, \tag{2}$$

где m — действительное число.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — действительная функция, которая для $x > a$ имеет n-ю производную, и пусть*

$$f(x) \sim A\varphi(x), \quad x \to \infty, \tag{3}$$

$$f^{(n)}(x) > -Mx^{-n}\varphi(x), \quad x > a, \quad M > 0, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ — функция правильного возрастания и монотонна для $x > a$. Тогда

$$f^{(i)}(x) \sim Am(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)\, x^{-i} \varphi(x), \quad x \to \infty,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{5}$$

где m — число, определенное равенством (2).

Заметим сначала, что пишем $f(x) \sim A\varphi(x)$ для $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$, причем A — произвольное число.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольные положительные числа, расположенные в возрастающем порядке, и $\alpha_{n-1} < 1$, $\alpha_0 = 0$. Положим, что $x_i = x + \alpha_i x$. Из формулы (1) получаем:

$$\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - (n-1)x}{n!} f^{(n)}(\zeta), \quad (6)$$

где $x < \zeta < x_{n-1}$. Из (4) легко получить, что

$$f^{(n)}(\zeta) > -M_1 x^{-n} \varphi(x), \quad (7)$$

где $M_1 > 0$ — конечное число. Тогда из (6) получим

$$\frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{(n-1)! \varphi(x)} < \frac{x^{n-1}\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{\varphi(x)} + M_1 \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-2}}{n!}. \quad (8)$$

Легко убедиться, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-1} f(x_i)}{\varphi(x) F'(x_i)} = A \frac{(1+\alpha_i)^m}{\Phi'(\alpha_i)}, \qquad \Phi(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - \alpha_i).$$

Тогда из (8) при фиксированных α_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, получаем

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{(n-1)! \varphi(x)} \leqslant$$

$$\leqslant A\omega[(1+x)^m; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}] + M_1 \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n!}.$$

Если теперь допустим, что числа α_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, стремятся к нулю, то из предыдущего неравенства получаем

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)} \leqslant Am(m-1)\ldots(m-n+2). \quad (9)$$

Пусть теперь $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ — отрицательные числа, расположенные в возрастающем порядке, причем $\alpha_0 > -1/2$, $\alpha_{n-1} = 0$. Для $x_i = x + \alpha_i x$, $x > 2a$, имеем формулу

$$\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2} - (n-1)x}{n!} f^{(n)}(\zeta), \quad (10)$$

где $x_0 < \zeta < x$. Тогда из (7) и (10) получаем:

$$\frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{(n-1)! \varphi(x)} > \frac{x^{n-1}\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{\varphi(x)} + M_1 \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2}}{n!},$$

откуда выводим, как было показано выше, что

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)} \geqslant Am(m-1)\ldots(m-n+2). \quad (11)$$

Из неравенств (9) и (11) сразу же следует асимптотическое равенство $(x \to \infty)$

$$f^{(n-1)}(x) \sim Am(m-1)\ldots(m-n+2)\,x^{-n+1}\varphi(x),$$

из которого непосредственно вытекают остальные такие же из (5) для $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — действительная функция, имеющая для $x > a$ n-ю производную, которая монотонна. Пусть, кроме того, имеем для $x \to \infty$*

$$f(x) \sim A\varphi(x), \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ — функция правильного возрастания для $x > a$.

Тогда будем иметь $(x \to \infty)$

$$f^{(n)}(x) \sim Am(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{-n}\varphi(x). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n < 1$, — произвольные возрастающие положительные числа и обозначим $x_i = x + \alpha_i x$, $\alpha_0 = 0$. Предположим, например, что $f^{(n)}(x)$ — неубывающая функция. Известно, что

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}, \quad x_0 < \zeta < x_n, \quad F(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \geqslant \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Отсюда при фиксированных α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, получаем

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{x^n f^{(n)}(x)}{n!\,\varphi(x)} \leqslant A\omega\left[(1+x)^m; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\right].$$

Полагая, что α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, стремятся к нулю, получаем

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{x^n f^{(n)}(x)}{n!\,\varphi(x)} \leqslant A\,\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}. \tag{14}$$

Таким же способом при α_i $(\alpha_i < \alpha_{i+1},\ \alpha_n = 0,\ \alpha_0 > -{}^1/_2)$ отрицательных получаем

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{x^n f^{(n)}(x)}{\varphi(x)} \geqslant Am(m-1)\ldots(m-n+1). \tag{15}$$

Равенство (13) непосредственно следует из (14) и (15).

Из доказательства видно, что предыдущие теоремы остаются в силе для случая, когда функция определена в интервале $0 < x < c$. Тогда равенства (3), (5), (12), (13) должны быть взяты для $x \to 0$. Из предыдущих теорем в частном случае, когда $\varphi(x) = x^m$, при специальных значениях числа n непосредственно получаем уже известные результаты Харди — Литтльвуда [4], Ландау [5], Фуживара [6], Дейч [7], полученные ими при некоторых ограничениях.

Доказанные теоремы нетрудно распространить и на последовательности действительных чисел и получить следующие теоремы.

Последовательность положительных чисел $\{p_n\}_1^\infty$ называется правильно возрастающей, если для каждого положительного числа λ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n_1}}{p_n} = \lambda^m , \tag{16}$$

где n_1 — самое большое число натурального ряда, которое содержится в λn.

Имеем теоремы:

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, для которой имеем

$$a_n \sim Ap_n, \quad \Delta^k a_n > -Mn^{-k} p_n, \quad M > 0,$$

где $\{p_n\}_1^\infty$ — правильно возрастающая и монотонная последовательность для $n > N$.

Тогда будем иметь $(n \to \infty)$

$$\Delta^i a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-i+1)\, n^{-i} p_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел и предположим, что за $n > N$ последовательность $\Delta^k a_n$ монотонна. Пусть, кроме того, имеем $(n \to \infty)$

$$a_n \sim Ap_n,$$

причем $\{p_n\}_1^\infty$ — правильно возрастающая последовательность для $n > N$.

Тогда будем иметь

$$\Delta^k a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-k+1)\; n^{-k} p_n,$$

где m — число, определенное равенством (16).

Частные случаи при $p_n = n^\alpha$, $k = 1, 2$, даны Фуживара([6]) и Дейч ([8]).

Поступило
21 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Schur, Math. Zs., **31**, 391 (1929). [2] N. Obrechkoff, Ber. Sächs. Akad. Leipzig, **82**, 208 (1930). [3] J. Karamata, Bull. Soc. math. France, **61**, 55 (1933). [4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc., **11**, 417 (1913). [5] E. Landau, Rendiconti Palermo, **3** (1911). [6] M. Fujiwara, Tôhoku Math. Journ., **15**, 323 (1919). [7] G. Doetsch, Math. Zs., **11**, 161 (1921). [8] G. Doetsch, Math. Ann., **82**, 68 (1921).