Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. М. МИЛИН и Н. А. ЛЕБЕДЕВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 V 1949)

Пусть S — класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$; S_k $(k = 2, 3, \ldots)$ — класс функций $f_k(z) = \sqrt[k]{f(z^k)}$, где $f(z) \in S$ $(S_k \subset S)$; Σ_0 — класс функций $F(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)}$, $|\zeta| > 1$, где $f(z) \in S$; Σ_k $(k = 2, 3, \ldots)$ — класс функций $F_k(\zeta) = \sqrt[k]{F(\zeta^k)}$, где $F(\zeta) \in \Sigma_0$ $(\Sigma_k \subset \Sigma_0)$; S_R^* — класс функций $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих при любых z_1 и z_2 из круга $|z| < 1$ условию $f(z_1) f(z_2) \neq 1$.

Обозначим: площадь, деленную на π, образа круга $|z| < r < 1$ при отображении функцией $f_k(z) \in S_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ через $S_k(r)$ (для общности обозначения под $f_1(z)$ понимается функция, принадлежащая классу S); площадь, деленную на π, дополнения к образу области $|\zeta| > \frac{1}{r} > 1$ при отображении функцией $F_k(\zeta) \in \Sigma_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ — через $\sigma_k(r)$. $S_k(r)$, построенную для функции $f_k^*(z) = \frac{z}{(1-z^k)^{2/k}} \in S_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, обозначим через $S_k^*(r)$.

1. Теорема 1. *Для любых вещественных p и q и любых ζ_1 и ζ_2, $|\zeta_1| = |\zeta_2| = \frac{1}{r} > 1$, для $F_2(\zeta) \in \Sigma_2$ выполняется неравенство*:

$$\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}(|p+q|+|p-q|)}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}(|p+q|-|p-q|)}} \leqslant \left|\frac{F_2(\zeta_2)-F_2(\zeta_1)}{\zeta_2-\zeta_1}\right|^p \left|\frac{\zeta_2+\zeta_1}{F_2(\zeta_2)+F_2(\zeta_1)}\right|^q \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+r^2)^{\frac{1}{2}(|p+q|-|p-q|)}}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}(|p+q|+|p-q|)}}.$$

Замечание. При $p = -q = -1$ из правого неравенства получается известное неравенство Г. М. Голузина [1].

Теорема 1 представляет собой обобщенную теорему искажения. Рассматривая ее при $p = -q = -1$ и $p = q = 1$, удается доказать следующие теоремы:

Теорема 2. *Для функции $f_k(z) \in S_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеем*

$$\varlimsup_{r \to 1} \sup_{f_k(z) \in S_k} \frac{S_k(r)}{S_k^*(r)} = 1.$$

Теорема 3. *Для функции $f_k(z) \in S_k$ имеем при $k = 1, 2$:*

$$\varlimsup_{r \to 1} \sup_{f_k(z) \in S_k} \frac{\int\limits_{|z|=1} |f_k(rz)|\,|dz|}{\int\limits_{|z|=1} |f_k^*(rz)|\,|dz|} = 1,$$

а при $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\varlimsup_{r \to 1} \sup_{f_k(z) \in S_k} \frac{\int\limits_{|z|=1} |f_k(rz)|^2\,|dz|}{\int\limits_{|z|=1} |f_k^*(rz)|^2\,|dz|} = 1,$$

где $f_k^*(z) = \frac{z}{(1-z^k)^{2/k}}$.

Теорема 4. *Для функции $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$ имеем*

$$\varlimsup_{r \to 1} \sup_{f(z) \in S} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n r^n} = 1,$$

$$\varlimsup_{r \to 1} \sup_{f(z) \in S} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 r^n} = 1.$$

Теорема 5. *Для функции $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$ справедливы неравенства:*

при $0 < r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |f(rz)|\,|dz| < \frac{r}{1-r^2} + A_1$$

и

$$|c_n| < \frac{e}{2} n + A_2,$$

где за A_1 и A_2 можно взять соответственно 0,65; 1,8.

2. Gronwall (²) якобы доказал, что для $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in S$ имеет место при $|c_2| < 1$ оценка

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{4(1+|c_2|)} \left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1+|c_2|} - 1\right] + \frac{1}{4(1-|c_2|)} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1-|c_2|}\right],$$

где $|z| = r$.

Эта оценка опровергается при любом c_2: $|c_2| < 1$ и $0 < r < 1$ функцией:

$$f_0(z) = \frac{1-a}{4(1+|c_2|+a)} \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1+|c_2|+a} - 1\right] + \\ + \frac{1+a}{4(1-|c_2|-a)} \left[1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{1-|c_2|-a}\right]$$

при всяком a: $0 < a < 1 - |c_2|$, принадлежащей классу $S\left(\frac{f''_0(0)}{2} = |c_2|\right)$, потому, что для любого r: $0 < r < 1$ всегда можно найти a: $0 < a < 1 - |c_2|$ такое, что

$$\max_{|z| \leqslant r} |f_0(z)| > \frac{1}{4(1 + |c_2|)}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1+|c_2|} - 1\right] +$$
$$+ \frac{1}{4(1 - |c_2|)}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1-|c_2|}\right].$$

Становится небезынтересной следующая теорема:

Теорема 6. *Для функции $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in S$ имеют место при $0 < r < 1$ следующие оценки:*

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} e^{-\frac{1}{2}(2 - |c_2|) r^2},$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} e^{-\frac{1}{2}(2 - |c_2|) r^2},$$

где $r = |z|$.

3. Теорема 7. *Для функции $f(z) \in S$ имеет место точная оценка:*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |f(rz)|\,|dz| \leqslant \sqrt{\frac{S_2(r)}{\sigma_2(r)}},$$

где $S_2(r)$ и $\sigma_2(r)$ строятся соответственно для функций $f_2(z) = \sqrt{f(z^2)}$ и $F_2(\zeta) = \sqrt{\frac{1}{f(1/\zeta^2)}}$, причем знак равенства имеет место только для функции $f(z) \equiv z$.

На основании теоремы 7 легко доказывается следующая теорема:

Теорема 8. *Для функции $f(z) \in S_R^*$ имеем*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| < 1;$$

знак равенства возможен только для функции, ограниченной по модулю единицей в $|z| < 1$.

Следствие. Для функции $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in S_R^*$ имеет место оценка $|a_n| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$; знак равенства возможен только для функции $f(z) = \eta z^n$, $|\eta| = 1$.

Последнее утверждение долгое время являлось гипотезой. В направлении ее решения ранее Rogosinskj ([3]) доказал это утверждение только для $n = 1$ и $n = 2$ *.

Поступило
31 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Матем. сб., 19, (61), 183 (1946). [2] T. H. Gronwall, Proc. Acad. Sci. Am., № 6. 300 (1920). [3] W. Rogosinskj, Journ. Lond. Math. Soc., 14, part 1, № 53, 4 (1939). [4] И. Базилевич, ДАН, 65, № 3 (1949).

* Настоящая работа была доложена 31 декабря 1948 г. на семинаре (при Ленинградском отделении математического института АН СССР) по теории функций комплексного переменного, руководимом Г. М. Голузиным.

Как нам стало известно после нашего доклада, некоторые результаты, касающиеся оценок в классе S, были получены И. Базилевичем ([4]).