Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

О. В. ЛОКУЦИЕВСКИЙ

О РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ*

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1949)

Как известно, имеет место следующая

Теорема. *Если нормальное пространство X может быть представлено как сумма не более чем счетного числа своих замкнутых подмножеств X_n таких, что* $\dim X_n \leqslant r$, *то* $\dim X \leqslant r$**.

В § 1 строится бикомпакт $S = S_1 \cup S_2$, где S_1, S_2 замкнуты в S, $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = 1$, но $\operatorname{ind} S = 2$. Из неравенства $\dim R \leqslant \operatorname{ind} R$, доказанного для бикомпактов П. С. Александровым (1), и эквивалентности утверждений $\operatorname{ind} R = 0$, $\dim R = 0$ следует, что $\dim S_1 = \dim S_2 = 1$. Поэтому, в силу сформулированной выше теоремы, $\dim S = 1$. Таким образом, из нижеследующего вытекает (при значительно более простой конструкции) результат А. Л. Лунца (2) о существовании бикомпактов, для которых ind не совпадает с dim. В § 2 этот результат переносится на случай диадических бикомпактов.

§ 1. 1. Каждому трансфиниту $\alpha < \omega_1$ поставим в соответствие экземпляр I_α отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ координатной плоскости, отождествив его левый конец с α, а правый с $\alpha + 1$. Множество, полученное присоединением к указанному числа ω_1 и обозначаемое через P, топологизируем, установив соотношения порядка***. Для различных $\xi_1, \xi_2 \in P \setminus (\omega_1)$ полагаем $\xi_1 < \xi_2$, если выполнено одно из двух условий: 1° $\xi_1 \in I_{\alpha_1}$, $\xi_2 \in I_{\alpha_2}$, где $\alpha_1 < \alpha_2$; 2° $\xi_1, \xi_2 \in I_\alpha$, причем на этом отрезке $\xi_1 < \xi_2$. Кроме того, по определению, $\omega_1 > \xi$ для всякого $\xi \in P \setminus (\omega_1)$. Легко видеть, что P есть бикомпакт.

2. Пусть C есть канторов дисконтинуум (удобно рассматривать его как упорядоченное множество) и $R = P \times C$. Тогда каждая точка R есть пара (ξ, x), где $\xi \in P$, $x \in C$.

Введем обозначения: $C_{x_1}^{x_2}(\xi_0) = \mathscr{E}(\xi = \xi_0, x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$, $P_{\xi_1}^{\xi_2}(x_0) = \mathscr{E}(\xi_1 \leqslant \leqslant \xi \leqslant \xi_2, x = x_0)$. Рассмотрим открытое множество $G \subseteq R$, для которого $G_1 = G \cap C_0^1(\omega_1) \neq \Lambda$ ****, причем верхняя грань G_1 есть двухсторонняя точка $(\omega_1, x_0) \in C_0^1(\omega_1)$. Справедливо следующее утверждение:

А. *Если* $P_\xi^{\omega_1}(x_0) \not\subseteq \overline{G} \setminus G$ *при любом* $\xi < \omega_1$, *то* $C_{x_0}^{x_0'}(\omega_1) \subseteq \overline{G} \setminus G$ *при некотором* $x_0' > x_0$.

Доказательство. Существует последовательность $\{(\omega_1, x_n)\} \to \to (\omega_1, x_0)$, где $(\omega_1, x_n) \in G$, $n = 1, 2 \ldots$ Так как G открыто, то при

---

* Работа сделана под руководством П. С. Александрова.

** dim обозначает размерность, определенную при помощи покрытий, а ind — индуктивную размерность.

*** Открытые множества определяются как порядковые интервалы и всевозможные их суммы.

**** Λ обозначает пустое множество; 0, 1 суть концевые точки C.

некотором $\xi_n < \omega_1$ $P_{\xi_n}^{\omega_1}(x_n) \subseteq G$. Но ω_1 есть регулярное число. Поэтому все ξ_n не превосходят некоторого $\xi_0 < \omega_1$. Легко видеть, что $P_{\xi_0}^{\omega_1}(x_0) \subseteq \overline{G}$. Из посылки доказываемого утверждения следует существование несчетного множества $D = \{(\xi_\nu, x_0)\} \subseteq G$, имеющего точку (ω_1, x_0) единственной точкой конденсации. Так как G открыто, то для каждого ν найдется $x_\nu > x_0$, для которого $C_{x_0}^{x_\nu}(\xi_\nu) \subseteq G$. Из несчетности D заключаем, что при некотором $x_0' > x_0$ для несчетного множества значений ν имеет место неравенство $x_\nu > x_0'$. Легко видеть, что $C_{x_0}^{x_0'}(\omega_1) \subseteq \overline{G}$, а это и доказывает утверждение, так как x_0 есть верхняя грань G_1.

3. Пусть R' есть бикомпакт, полученный из R попарным отождествлением концов каждого смежного интервала $C_0^1(\omega_1)$. При этом отождествлении $C_0^1(\omega_1)$ перейдет в отрезок, обозначаемый через F, а множество односторонних точек $C_0^1(\omega_1)$ — в некоторое M. Так как M всюду плотно в F, то нетрудно доказать, что $\operatorname{ind} R' = 1$. Тем не менее, из А следует

А$'$. *Если G' есть открытое в R' множество, для которого $G_1' = G' \cap F \neq \Lambda$, причем верхняя грань G_1' не принадлежит M, то* $\operatorname{ind}(\overline{G'} \setminus G') \geqslant 1$.

4. Рассмотрим бикомпакт $Q = R_1' \cup R_2'$, где R_1', R_2' суть непересекающиеся экземпляры пространства R'. Через F_i, M_i будут обозначаться множества, лежащие в R_i' $(i = 1, 2)$ и соответствующие определенным в R' множествам F, M. Выберем на F_2 произвольно всюду плотное множество N того же порядкового типа, что и M_1, и не имеющее с M_2 общих точек, кроме концов F_2. Как известно ([3]), существует подобное отображение g отрезка F_2 на F_1, переводящее N в M_1. Можно рассматривать g как непрерывное отображение Q на некоторый бикомпакт $S = g(Q)$. Очевидно, $g(R_1') = S_1$, $g(R_2') = S_2$ суть гомеоморфизмы, $S = S_1 \cup S_2$. Если $E = g(F_1) = g(F_2)$, то $S_1 \cap S_2 = E$.

Покажем, что $\operatorname{ind} S = 2$. Пусть y есть произвольная внутренняя точка E и U — некоторая ее окрестность. Обозначим через U_1 пересечение $U \cap E$ и через y_0 — верхнюю грань U_1. Можно предполагать, не нарушая общности, что y_0 есть внутренняя точка E. Тогда y_0 не может принадлежать одновременно $g(M_1)$ и $g(M_2)$. Пусть, например, $y_0 \overline{\in} g(M_1)$. Если $O = U \cap S_1$, то из А$'$ заключаем, что $\operatorname{ind}(\overline{O} \setminus O) \geqslant 1$. Но так как $\overline{O} \setminus O \subseteq \overline{U} \setminus U$, то $\operatorname{ind}(\overline{U} \setminus U) \geqslant 1$, а потому $\operatorname{ind} S \geqslant 2$. Но нетрудно показать, что $\operatorname{ind} S \leqslant 2$, а так как $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = 1$, то построение примера этим закончено.

§ 2. Пусть S есть произвольный бикомпакт веса τ. Построим содержащий его диадический бикомпакт R того же веса, называемый далее диадической оболочкой S.

В силу известной теоремы П. С. Александрова ([4]), существуют замкнутое в D^τ множество $\breve{S}$ и непрерывное отображение f такие, что $f(\breve{S}) = S$. Обозначим через Ω непрерывное разбиение ([5]), порождающее f, и определим разбиение Ω' пространства D^τ следующим образом: 1° на $\breve{S}$ элементы Ω' совпадают с элементами Ω; 2° на $D^\tau \setminus \breve{S}$ элементы Ω' суть точки. Легко доказывается непрерывность Ω'. Обозначим через g отображение, порождаемое этим разбиением: $g(D^\tau) = R$. Как известно, g совпадает с f на множестве $\breve{S}$, и, следовательно, $S \subseteq R$. Очевидно, что R есть диадический бикомпакт веса τ. Имеют место

Теорема 1. *Если* $\dim S < +\infty$, *то* $\dim R = \dim S$.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{ind} S < +\infty$, *то* $\operatorname{ind} R \leqslant \operatorname{ind} S + 1$.

Коль скоро S есть бикомпакт, построенный в § 1, то для его диадической оболочки R из этих теорем немедленно следует: $\dim R = 1$, $2 \leqslant \operatorname{ind} R \leqslant 3$.

Заметим, что в известном смысле теорема 2 не может быть усилена: существуют такой бикомпакт S и такая его диадическая оболочка R, что $\operatorname{ind} S = 1$, но $\operatorname{ind} R = 2$. Вопрос о существовании бикомпакта, индуктивная размерность которого меньше индуктивной размерности любой его диадической оболочки, остается открытым.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\omega = \{U_1, U_2, \ldots, U_p\}$ есть произвольное открытое покрытие R; $\breve{U}_\nu = g^{-1}(U_\nu)$, $U_\nu^S = S \cap U_\nu$. Тогда $\breve{\omega} = \{\breve{U}_1, \breve{U}_2, \ldots, \breve{U}_p\}$ и $\omega^S = \{U_1^S, U_2^S, \ldots, U_p^S\}$ суть открытые покрытия D^τ и S соответственно. Рассмотрим замкнутое покрытие $\alpha^S = \{F_1^S, F_2^S, \ldots, F_k^S\}$ пространства S кратности $n+1$, вписанное в ω^S. Построим систему открытых в R множеств $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$, $H_\nu \supseteq F_\nu^S$, такую, что если $F_\nu = \bar{H}_\nu$, то $\alpha = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ подобна α^S и вписана в ω, что всегда возможно. Пусть $\breve{F}_\nu = g^{-1}(F_\nu)$, $\breve{H}_\nu = g^{-1}(H_\nu)$. Тогда $\breve{H} = \bigcup\limits_{\nu=1}^{k} \breve{H}_\nu$ есть множество, открытое в D^τ, причем $\breve{S} \subseteq \breve{H}$. Так как $\dim D^\tau = 0$, то существует открыто-замкнутое $\breve{A} \subseteq D^\tau$ такое, что $\breve{S} \subseteq \breve{A} \subseteq \breve{H}$. Пусть $\breve{B} = D^\tau \setminus \breve{A}$, $\breve{F}_\nu^A = \breve{A} \cap \breve{F}_\nu$, $\breve{U}_\nu^B = \breve{B} \cap \breve{U}_\nu$. В силу нульмерности $\breve{B}$ существует система замкнутых непересекающихся множеств $\{\breve{F}_1^B, \breve{F}_2^B, \ldots, \breve{F}_m^B\}$, вписанная в $\breve{\omega}^B = \{\breve{U}_1^B, \ldots \breve{U}_p^B\}$ и такая, что $\bigcup\limits_{\nu=1}^{m} \breve{F}_\nu^B = \breve{B}$. Если $F_\nu^A = g(\breve{F}_\nu^A)$, $F_\nu^B = g(\breve{F}_\nu^B)$, то система $\beta = \{F_1^A, F_2^A, \ldots, F_k^A, F_1^B, F_2^B, \ldots, F_m^B\}$ образует замкнутое покрытие R, вписанное в ω. Но так как на $\breve{B}$ отображение взаимно-однозначно, то $F_\mu^A \cap F_\nu^B = \Lambda$ при любых μ, ν и $F_\mu^B \cap F_\nu^B = \Lambda$ при $\mu \neq \nu$. Кроме того, $F_\nu^A \subseteq F_\nu$. Поэтому кратность β не превосходит $n+1$, а это означает, что $\dim R \leqslant \dim S$. Но из того, что $S \subseteq R$, и из монотонности $\dim$ относительно замкнутых подмножеств бикомпакта заключаем, что $\dim R = \dim S$.

Доказательство теоремы 2. Пусть x есть некоторая точка R и U — ее произвольная окрестность. Теорема будет, очевидно, доказана, если мы найдем такую окрестность V той же точки, что $V \subseteq U$ и $\bar{V} \setminus V \subseteq S$. Возьмем окрестность U' точки x, лежащую в U вместе с замыканием: $\bar{U}' \subseteq U$. Обозначим $\bar{U}'$ через F, и пусть $g^{-1}(F) = \breve{F}$, $g^{-1}(U) = \breve{U}$. Найдется открыто-замкнутое множество $\breve{A} \subseteq D^\tau$ такое, что $\breve{F} \subseteq \breve{A} \subseteq \breve{U}$. Если $A = g(\breve{A})$, то, очевидно, $F \subseteq A \subseteq U$. Если V есть открытое ядро A, то имеет место система включений $U' \subseteq V \subseteq A \subseteq U$, из которой следует, что V есть окрестность x, лежащая в U. Остается показать, что $\bar{V} \setminus V \subseteq S$. Пусть $y \in \bar{V} \setminus S$. Тогда, тем более, $y \in A \setminus S$. Так как $y \bar{\in} S$, то $g^{-1}(y)$ есть единственная точка $\breve{y}$, причем $\breve{y} \in \breve{A} \setminus \breve{S}$. Если $\breve{H}$ есть произвольная окрестность $\breve{y}$, лежащая в $\breve{A} \setminus \breve{S}$, то $y \in g(\breve{H}) = H \subseteq A \setminus S$. Легко видеть, что H есть открытое множество. Таким образом, y лежит в A вместе со своей окрестностью, а потому $y \in V$, так как V есть открытое ядро A. Отсюда следует, что $\bar{V} \setminus V \subseteq S$, а это и доказывает теорему.

Поступило
19 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Сообщ. АН Груз.ССР, 2, 1 (1941). [2] А. Л. Лунц, ДАН, 66, № 5 (1949). [3] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937. [4] П. С. Александров, Усп. матем. наук, 2, в. 1 (17) (1947). [5] П. С Александров, H. Hopf, Topologie, Berlin, 1935.