Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. Н. БАБКИН

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА АКАДЕМИКА С. А. ЧАПЛЫГИНА ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 14 V 1949)

Как известно, алгорифм построения верхних и нижних функций, предложенный С. А. Чаплыгиным [1] в созданном им методе приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, предполагает, что правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ непрерывна вместе с $\partial f / \partial y$ и $\partial^2 f / \partial y^2$ в некоторой области U, содержащей точку $A(x_0, y_0)$, причем $\partial^2 f / \partial y^2$ сохраняет в этой области постоянный знак.

Последнего предположения, как указывает С. А. Чаплыгин, можно и не делать, но следует заметить, что это указание никем до сих пор не было реализовано.

В настоящей работе мы покажем, что можно дать такую модификацию метода С. А. Чаплыгина, в которой вообще не требуется никаких предположений о $\partial^2 f / \partial y^2$.

§ 1. Новый метод построения верхних и нижних функций

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с $\partial f / \partial y$ в некоторой области U, содержащей точку $A(x_0, y_0)$. Требуется найти решение уравнения (1), обращающееся в y_0 при $x = x_0$.

Пусть мы нашли каким-нибудь способом (например, так, как это рекомендует делать С. А. Чаплыгин) две функции $z = z(x)$ и $t = t(x)$, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) графики функций $z = z(x)$ и $t = t(x)$ проходят через точку $A(x_0, y_0)$ и целиком лежат в области U;

2) на сегменте $[x_0, x_1]$ имеют место дифференциальные неравенства

$$\frac{dz}{dx} - f(x, z) < 0, \qquad \frac{dt}{dx} - f(x, t) > 0. \tag{2}$$

Тогда, в силу известных теорем С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, будут справедливы неравенства:

$$z(x) < y(x) < t(x), \qquad x_0 < x \leqslant x_1,$$

где $y=y(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Функцию $z=z(x)$ называют **нижней**, а $t=t(x)$ — **верхней**.

Рассмотрим замкнутую область $\bar{V}$, ограниченную кривыми $z=z(x)$, $t=t(x)$ и прямой $x=x_1$, целиком лежащую в области U. Пусть $m<\partial f/\partial y<M$ в области $\bar{V}$.

Обозначим, соответственно, через $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ левые части неравенств (2), т. е. $dz/dx-f(x, z)=\alpha(x)$, $dt/dx-f(x, t)=\beta(x)$, и рассмотрим два линейных уравнения:

$$\frac{d\sigma_1}{dx}-m\sigma_1-\beta(x)=0, \qquad \frac{d\eta_1}{dx}-m\eta_1+\alpha(x)=0 \tag{3}$$

при начальных условиях $\sigma_1(x_0)=\eta_1(x_0)=0$. Ясно, что $\sigma_1(x)$ и $\eta_1(x)$ находятся из уравнений (3) квадратурами.

Нетрудно видеть, что $\sigma_1(x)>0$ и $\eta_1(x)>0$.

Подставляя в левые части уравнений (3) разность $t(x)-y(x)$ (в первое) и разность $y(x)-z(x)$ (во второе), убедимся, что эти разности будут верхними функциями по отношению к $\sigma_1(x)$ и $\eta_1(x)$.

Действительно, имеем

$$\frac{d}{dx}(t-y)-m(t-y)-\beta(x)=f(x, t)-f(x, y)-m(t-y)=$$
$$=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t-y)-m(t-y)=\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}-m\right)(t-y)>0,$$

где $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f[x, y+\theta(t-y)]$, $0<\theta<1$.

Аналогично, для разности $y-z$ имеем

$$\frac{d}{dx}(y-z)-m(y-z)+\alpha(x)=$$
$$=f(x, y)-f(x, z)-m(y-z)=\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}-m\right)(y-z)>0.$$

Последние два неравенства и доказывают, что

$$\sigma_1(x)<t(x)-y(x), \quad \eta_1(x)<y(x)-z(x), \quad x_0<x\leqslant x_1,$$

или что

$$y(x)<t(x)-\sigma_1(x), \quad z(x)+\eta_1(x)<y(x).$$

Полагая

$$t(x)-\sigma_1(x)=t_1(x), \quad z(x)+\eta_1(x)=z_1(x),$$

мы будем иметь следующую пару приближений $t_1(x)$ и $z_1(x)$ для искомого решения $y=y(x)$, причем

$$z(x)<z_1(x)<y(x)<t_1(x)<t(x), \quad x_0<x\leqslant x_1.$$

Покажем, что построенные приближения $z_1(x)$ и $t_1(x)$ будут удовлетворять неравенствам:

$$\frac{dz_1}{dx}-f(x, z_1)<0, \quad \frac{dt_1}{dx}-f(x, t_1)>0, \quad x_0<x\leqslant x_1.$$

Действительно, имеем

$$\frac{dz_1}{dx} - f(x, z_1) = \frac{dz}{dx} + \frac{d\eta_1}{dx} - f(x, z + \eta_1) =$$

$$= \left[\frac{dz}{dx} - f(x, z)\right] + \frac{d\eta_1}{dx} - [f(x, z + \eta_1) - f(x, z)] =$$

$$= \alpha(x) + \frac{d\eta_1}{dx} - m\eta_1 - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} - m\right)\eta_1 = \left(m - \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right)\eta_1 < 0. \qquad (4)$$

Аналогично будем иметь

$$\frac{dt_1}{dx} - f(x, t_1) = \frac{dt}{dx} - \frac{d\sigma_1}{dx} - f(x, t - \sigma_1) =$$

$$= \left[\frac{dt}{dx} - f(x, t)\right] - \frac{d\sigma_1}{dx} - [f(x, t - \sigma_1) - f(x, t)] =$$

$$= - m\sigma_1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\sigma_1 = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} - m\right)\sigma_1 > 0. \qquad (5)$$

Обозначив соответственно через $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ разности $\frac{dz_1}{dx} - f(x, z_1)$ и $\frac{dt_1}{dx} - f(x, t_1)$, можно написать уравнения для определения следующих приближений:

$$\frac{d\sigma_2}{dx} - m\sigma_2 - \beta_1(x) = 0, \qquad \frac{d\eta_2}{dx} - m\eta_2 + \alpha_1(x) = 0. \qquad (6)$$

Продолжая этот процесс, мы построим две последовательности функций $\{t_n(x)\}$ и $\{z_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, апроксимирующих искомое решение $y(x)$ сверху и снизу, причем

$$\begin{aligned} &z(x) < z_1(x) < z_2(x) < \ldots < z_n(x) < \ldots < y(x), \\ &t(x) > t_1(x) > t_2(x) > \ldots > t_n(x) > \ldots > y(x). \end{aligned} \qquad (7)$$

В случае $m = 0$ рассмотренные итерации обращаются в пикаровские (исследование этого случая дано нами ранее ([3])).

§ 2. Сходимость приближений

Решая уравнения (3), получим

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= e^{m(x - x_0)} \int_{x_0}^{x} \beta(t) e^{-m(t - x_0)} dt, \\ \eta_1(x) &= - e^{m(x - x_0)} \int_{x_0}^{x} \alpha(t) e^{-m(t - x_0)} dt. \end{aligned} \qquad (8)$$

Пусть $\beta(x) < \delta_0$ и $-\alpha(x) < \delta_0$ при $x_0 < x \leqslant x_1$. Тогда

$$0 < \sigma_1(x) < \delta_0 e^{m(x - x_0)}(x - x_0) \qquad \text{при } m > 0;$$

и

$$\sigma_1(x) < \delta_0 e^{m(x - x_0)} e^{-m(x - x_0)}(x - x_0) = \delta_0(x - x_0) \quad \text{при } m \leqslant 0.$$

Пользуясь найденными оценками и равенствами (4) и (5), легко получим, что

$$0<\sigma_2(x)<\delta_0(M-m)\,e^{m(x-x_0)}\frac{(x-x_0)^2}{2!}\quad \text{при } m>0;$$

$$\sigma_2(x)<\delta_0(M-m)\frac{(x-x_0)^2}{2!}\quad \text{при } m\leqslant 0.$$

Продолжая эти неравенства, получим

$$\left.\begin{aligned}&0<\sigma_n(x)<\delta_0(M-m)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n!}e^{m(x-x_0)}\quad \text{при } m>0;\\&0<\sigma_n(x)<\delta_0(M-m)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n!}\quad \text{при } m\leqslant 0.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Эти же оценки справедливы и для $\eta_n(x)$.

Неравенства (9) показывают, что последовательности $\{\sigma_n(x)\}$ и $\{\eta_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ равномерно на $[x_0, x_1]$ стремятся к нулю, а отсюда следует равномерная сходимость последовательностей $\{t_n(x)\}$ и $\{z_n(x)\}$.

Переходя к пределу в равенствах

$$t_n(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}\left[f(x, t_n)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}-m\right)\sigma_n\right]dx,$$

$$z_n(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}\left[f(x, z_n)-\left(m-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta_n\right]dx,$$

убедимся, что

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x)=\lim_{n\to\infty} z_n(x)=y(x).$$

Примечание. Для ускорения сходимости приближений можно немного видоизменить процесс нахождения поправок $\sigma_n(x)$ и $\eta_n(x)$.

В линейных уравнениях, определяющих эти поправки, можно брать не одно и то же m, а различные, изменяющиеся вместе с индексом n. Точнее, $\sigma_n(f)$ и $\eta_n(x)$ определять из следующих уравнений:

$$\frac{d\sigma_n}{dx}-m_{n-1}\sigma_n-\beta_{n-1}(x)=0,\qquad \frac{d\eta_n}{dx}-m_{n-1}\eta_n+\alpha_{n-1}(x)=0,$$

где m_{n-1} выбрано так, чтобы в области $\overline{V}_{n-1}$, ограниченной кривыми $t_{n-1}=t_{n-1}(x)$, $z_{n-1}=z_{n-1}(x)$ и прямой $x=x_1$, имело место неравенство $m_{n-1}<\partial f/\partial y\ (m_{n-1}\geqslant m_{n-2})$.

Поступило
7 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Тр. ЦАГИ, в. 130 (1932). [2] Н. Н. Лузин, Тр. ЦАГИ, в. 141 (1932). [3] Б. Н. Бабкин, ДАН, 59, № 3 (1948).