Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О. Б. ФИРСОВ

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 11 VII 1949)

1. Вычисление фазы рассеяния в поле с центральной симметрией сводится к нахождению действительного решения уравнения

$$\frac{d^2 R_l}{dx^2} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) R_l = U(x) R_l(x) \tag{1}$$

при условии, что $R_l(0) = 0$.

При $x \gg l+1$ функция $R_l(x)$ имеет * асимптотический вид:

$$R_l \sim c \sin\left(x - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{2}$$

Фаза δ_l рассеяния может быть выражена через определенные интегралы, содержащие функцию $R_l(x)$ и потенциал $U(x)$.

В самом деле, рассматривая правую часть уравнения (1) как известную функцию и решая формально полученное неоднородное уравнение, при указанном выше граничном условии, получим соотношение

$$R_l(x) = F_l(x)\left[1 + \int_0^x U(t)\,\Phi_l(t)\,R_l(t)\,dt\right] - \Phi_l(x)\int_0^x U(t)\,F_l(t)\,R_l(t)\,dt. \tag{3}$$

Здесь $F_l(x)$ и $\Phi_l(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (1) без правой части; они выражаются через функции Бесселя:

$$F_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{l+1/2}(x), \quad \Phi_l(x) = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{-l-1/2}(x).$$

При $x \gg l+1$ имеем асимптотически:

$$R_l(x) = \left(1 + \int_0^x U(t)\,\Phi_l(t)\,R_l(t)\,dt\right) \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) -$$

$$- \int_0^\infty U(t)\,F_l(t)\,R_l(t)\,dt \cdot \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right),$$

* Если потенциальная функция $U(x)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0} x^2 U(x) = \lim_{x\to\infty} U(x) = 0.$$

так как $F_l(x)$ и $\Phi_l(x)$ при $x \gg l+1$ асимптотически стремятся, соответственно, к $\sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)$.

Сравнивая последнее выражение для R_l с (2), получаем

$$\operatorname{tg} \delta_l = - \frac{\int\limits_0^\infty U(x)\, F_l(x)\, R_l(x)\, dx}{1 + \int\limits_0^\infty U(x)\, \Phi_l(x)\, R_l(x)\, dx}. \tag{4}$$

Если

$$\alpha = \left| \int\limits_0^\infty U(x)\, F_l^2(x)\, dx \right| < 1, \quad \beta = \left| \int\limits_0^\infty U(x)\, \Phi_l(x)\, F_l(x)\, dx \right| < 1,$$

то приближенное выражение для $R_l(x)$ можно получить, решая (3) методом последовательных приближений, считая в первом (борновском) приближении $R_l(x) \approx F_l(x)$.

Тангенс фазы может быть определен, далее, при подстановке в (4) полученного ряда для $R_l(x)$. Он также может быть определен при подстановке в (4) любого приближенного выражения для $R_l(x)$ с точностью, соответствующей этому приближению.

2. Исходя из выражений (3) и (4), легко уточнить условия применяемости приближения Борна, в котором $R_l(x) \approx F_l(x)$, а $\operatorname{tg} \delta_l \approx \delta_l \approx \int\limits_0^\infty U(x)\, F_l^2(x)\, dx$. Очевидно, что приближение Борна допустимо, если

$$\alpha \ll 1, \qquad \beta \ll 1. \tag{5}$$

Нужно различать два случая. Возможен случай, когда функция $U(x)$ убывает настолько быстро, что значения интегралов α и β определяются областью $x \ll l+1$,— это будет при рассеянии медленных частиц *. Тогда имеем $\alpha < \beta$, так как при $x \ll l+1$ приближенно справедливо

$$F_l^2(x) \approx \frac{x^{2l+2}}{[(2l+1)!!]^2}, \quad F_l(x)\, \Phi_l(x) \approx \frac{x}{2l+1}.$$

Поэтому условия (5) выполняются, если $\beta < 1$, т. е. если

$$\int\limits_0^\infty V(r)\, \Phi_l(kr)\, F_l(kr)\, dr \ll \frac{\hbar^2 k}{2m}. \tag{6}$$

В случае быстрых частиц, когда значения интегралов α и β определяются областью $x \gg l+1$, имеем $\alpha > \beta$, так как произведение $\Phi_l(x)\, F_l(x)$ является быстро колеблющейся (по сравнению с изменением $U(x)$) закономерной функцией, а $F_l^2(x)$ знака не меняет. Условия (5) выполняются в этом случае, если $\alpha \ll 1$, что можно записать в виде:

$$\int\limits_0^\infty V(r)\, F_l^2(kr)\, dr \ll \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{7}$$

* В уравнении (1) $U(x) = V(r)/E$, где $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ — полная энергия частицы, $V(r)$ — потенциальная энергия, а $x = kr$, k — волновое число. Указанный в тексте случай соответствует тому, что $V(r)/E \ll 1$ при $kr \approx 1$.

Условия (6) и (7) уточняют обычные ([1]) оценки применимости приближения Борна.

3. Рассмотрим несколько подробнее случай рассеяния быстрых частиц.

Если условие (7) не выполняется, то, не ограничиваясь первым приближением $R_l(x) \approx F_l(x)$, решаем (3) формально методом последовательных приближений. При этом $R_l(x)$ определится в виде бесконечного ряда, подставляя который в (4), получим

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx -\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots} = -\operatorname{tg} \alpha, \tag{8}$$

т. е.

$$\delta_l \approx -\int_0^\infty U(x)\, F_l^2(x)\, dx. \tag{9}$$

При получении рядов (3) было использовано условие, что на расстояниях, существенных при вычислении интегралов α и β, $U(x)$ мало меняется при изменениях x порядка единицы. Это позволило заменить $F_l^2(x)$ и $\Phi_l^2(x)$ их средним значением $\overline{F_l^2} \approx \overline{\Phi_l^2} \approx 1/_2$, а интегралами, содержащими произведения $\Phi_l(x) F_l(x)$, пренебречь *. Поэтому (8) справедливо лишь при условии, что $|\sin \alpha|$ и $|\cos \alpha|$ намного превышают величину $\left| \int_0^\infty U(x)\, \Phi_l(x)\, F_l(x)\, dx \right|$. Заметим, что при этом полученные значения δ_l почти не зависят от индекса l.

4. Для связанной частицы — когда энергия $E = -\hbar^2 k^2 / 2m$ отрицательна, для радиальной части волновой функции также можно написать уравнение (3), только $F_l(x)$ и $\Phi_l(x)$ определяются теперь через цилиндрические функции от мнимого аргумента:

$$F_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, I_{l+1/_2}(x), \quad \Phi_l(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, K_{l+1/_2}(x).$$

Учитывая асимптотическое поведение функций $F_l(x)$ и $\Phi_l(x)$:

$$x \ll l+1: \quad F_l(x) \approx \frac{x^{l+1}}{(2l+1)!!}, \quad \Phi_l(x) \approx \frac{(2l-1)!!}{x^l}, \quad \Phi_0(x) \approx 1,$$

$$x \gg l+1: \qquad F_l(x) \approx \frac{1}{2} e^x, \qquad \Phi_l(x) \approx e^{-x},$$

легко видеть из (3), что при $x \to 0$ $R_l(x)$ совпадает с $F_l(x)$, а при $x \to \infty$ удовлетворяет необходимому граничному условию $\lim\limits_{x\to\infty} R_l(x) \to 0$ только если

$$1 + \int_0^\infty U^*(x)\, \Phi_l(x)\, R_l(x)\, dx = 0. \tag{10}$$

---

* В окончательном выражении мы вновь заменяем $1/_2$ на $F_l^2(x)$, так как в противном случае, если $U(x)$ имеет плюс при $x = 0$, интеграл (9) расходится, что на самом деле не имеет места.

В интеграле (10) функция $U(x) = V\left(\frac{x}{k}\right)/E$ зависит от энергии. Так как обычно $U(x)\Phi_l(x)$ быстро убывает, то в интеграле (10) существенную роль играет значение $R_l(x)$ при малых x.

Поэтому (10) удобно для приближенного определения наиболее глубокого уровня энергии, соответствующего данному l, если известно приближенное выражение для $R_l(x)$ (при $x \to 0$ поведение $R_l(x)$ всегда известно).

Выражаю благодарность К. Тер-Мартиросяну за обсуждение и редакцию этой статьи.

Физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
9 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ч. 1, §§ 45, 110, М., 1948.