Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Действительный член Болгарской Академии наук
ЛЮБОМИР Н. ЧАКАЛОВ

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 VII 1949)

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m различных действительных чисел, через $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — соответствующие им целые неотрицательные числа, через $M+1$ — сумму $\sum\limits_{k=1}^{m}(r_k+1)$ и через $\psi(x)$ — некоторую функцию с ограниченным изменением в интервале $-\infty < x < \infty$, для которой интегралы Стильтьеса

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l\, d\psi(x), \quad l = 1, 2, \ldots, M,$$

сходятся. Под общей квадратурной формулой будем понимать формулу вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k), \tag{1}$$

коэффициенты которой не зависят от $f(x)$. Мы ставим себе задачей определить эти коэффициенты таким образом, чтобы равенство (1) было верным для всех полиномов $f(x)$, степень которых не превосходит M. Как мы увидим в дальнейшем, эта задача имеет вполне определенное решение, как и следовало ожидать, так как число $M+1$ неизвестных коэффициентов $A_{k\lambda}$ равно числу коэффициентов произвольного полинома степени M. Само собой разумеется, что подобные соображения не могут заменить доказательства существования и единственности решения поставленной задачи. Указанный ниже метод дает нам возможность не только установить существование и единственность решения, но и определить эффективно коэффициенты $A_{k\lambda}$. Мы сведем вопрос об их определении к вопросу о разложении подходящей рациональной функции $R(z)$ на сумму простейших дробей.

1. Главный результат настоящего сообщения можно сформулировать так:

Обозначим через $P(x)$ полином степени M

$$P(x) = (x-a_1)^{r_1+1}(x-a_2)^{r_2+1}\ldots(x-a_m)^{r_m+1}$$

и составим рациональную функцию

$$R(z) = \frac{1}{P(z)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\, d\psi.$$

Формула (1) *тогда и только тогда справедлива для всех полиномов, степень которых не превосходит* M, *когда коэффициенты* $A_{k\lambda}$ *связаны с коэффициентами разложения*

$$R(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z+a_k)^{\lambda+1}}$$

равенствами $\lambda!\,A_{k\lambda}=B_{k\lambda}$.

Доказательство. Обозначим для краткости через $\Phi[f]$ правую часть формулы (1). При любом выборе не зависящих от $f(x)$ постоянных $A_{k\lambda}$ оператор $\Phi[f]$ имеет следующие свойства:

1) оператор $\Phi[f]$ является линейным функционалом, т. е.

$$\Phi[f+g]=\Phi[f]+\Phi[g],\qquad \Phi[cf]=c\Phi[f],$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — любые функции, для которых оператор $\Phi[f]$ имеет смысл, и c — произвольная постоянная;

2) оператор $\Phi[f]$ равен нулю, если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ являются нулями функции $f(x)$, кратности которых больше соответствующих чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

Имея в виду эти свойства оператора $\Phi[f]$, мы допустим сперва, что коэффициенты $A_{k\lambda}$ можно подобрать так, чтобы формула (1) была верна для всех полиномов, степень которых не превосходит M. Подставим в (1) вместо полинома $f(x)$ полином M-й степени

$$f(x)=\frac{P(z)-P(x)}{z-x},$$

причем z есть не зависящий от x параметр. На основании свойств 1) и 2) получаем

$$\Phi\left[\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\right]=P(z)\,\Phi\left[\frac{1}{z-x}\right]-\Phi\left[\frac{P(x)}{z-x}\right]=P(z)\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}},$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,d\psi=P(z)\sum_{k=1}^{M}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}},$$

или

$$\frac{1}{P(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,d\psi=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}.$$

Левая часть последнего равенства есть как раз рациональная функция, которую мы выше обозначили через $R(z)$, а правая часть равенства является разложением этой рациональной функции на простейшие дроби. Так как коэффициенты в этом разложении однозначно определены, то тем самым и доказано, что наша задача имеет только одно решение (если она вообще имеет решение). Коэффициенты $A_{k\lambda}$ отличаются от коэффициентов разложения $R(z)$ только некоторыми числовыми множителями.

С другой стороны, пусть

$$R(z)=\frac{1}{P(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,d\psi=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

разложение рациональной функции $R(z)$ на простейшие дроби. Мы составим выражение

$$\Phi[f]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{\lambda!}f^{(\lambda)}(a_k)$$

и докажем, что формула

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,d\psi=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{\lambda!}f^{(\lambda)}(a_k) \tag{2}$$

верна для всех полиномов, степень которых не превосходит M.

Действительно, имеем, как и раньше,

$$\Phi\left[\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\right]=P(z)\,\Phi\left[\frac{1}{z-x}\right]-\Phi\left[\frac{1}{z-x}\right]=P(z)\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}=$$

$$=P(z)R(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,d\psi,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,d\psi=\Phi\left[\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\right]. \tag{3}$$

Если расположить полином $\frac{P(z)-P(x)}{z-x}$ по убывающим степеням z, получим

$$\frac{P(z)-P(x)}{z-x}=z^M+\varphi_1(x)z^{M-1}+\ldots+\varphi_M(x)\qquad(\varphi_0=1),$$

где $\varphi_k(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$ представляет собой полином от x степени k. Следовательно, тождество (3) можно переписать еще так:

$$\sum_{k=0}^{M}z^{M-k}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\,d\psi=\sum_{k=0}^{M}z^{M-k}\,\Phi[\varphi_k(x)].$$

Так как z произвольно, из этого следуют равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\,d\psi=\Phi[\varphi_k(x)],\qquad k=0,1,2,\ldots,M.$$

С другой стороны, всякий полином, степень которого не превосходит M, можно представить в виде линейной комбинации полиномов $\varphi_k(x)$, откуда следует верность формулы (2) для всякого такого полинома.

2. Чтобы получить более удобную форму для остаточного члена

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,d\psi-\Phi[f(x)]$$

формулы (1), когда мы ее применяем к произвольной функции $f(x)$, мы остановимся на самом важном случае, когда $\psi(x)$ определена следующим образом:

$\psi(x)=x$ для $a\leqslant x\leqslant b$; $\psi(x)=a$ для $x<a$; $\psi(x)=b$ для $x>b$.

В этом случае формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{M}\sum_{\lambda=0}^{r_k}A_{k\lambda}f^{(\lambda)}(a_k).$$

Мы предположим еще, что аргументы a_k принадлежат интервалу $[a, b]$ и расположены в возрастающем порядке:

$$a \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_m \leqslant b.$$

Пусть $f(x)$ определена в интервале $[a, b]$ и имеет в этом интервале непрерывные производные до $(M+1)$-го порядка. Если положим

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^M}{M!} f^{(M+1)}(t)\,dt,$$

то $g^{(M+1)}(x) = f^{(M+1)}(x)$, так что разность $f(x) - g(x)$ является полиномом от x, степень которого не превосходит M. На основании доказанного предложения

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Phi[f] = \int_a^b g(x)\,dx - \Phi[g]. \tag{4}$$

Но

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b dx \int_a^x \frac{(x-t)^M}{M!} f^{(M+1)}(t)\,dt = \int_a^b \frac{(b-t)^{M+1}}{(M+1)!} f^{(M+1)}(t)\,dt,$$

$$\Phi[g] = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} \int_a^{a_k} \frac{(a_k-t)^{M-\lambda}}{(M-\lambda)!} f^{(M+1)}(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_a^{a_k} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} \frac{(a_k-t)^{M-\lambda}}{(M-\lambda)!} f^{(M+1)}(t)\,dt,$$

откуда заключаем, что правая часть (4) может быть написана также в виде

$$\int_a^b \left\{ \frac{(b-t)^{M+1}}{(M+1)!} - u(t) \right\} f^{(M+1)}(t)\,dt,$$

где функция $u(t)$ определяется в частичном интервале

$$a_{s-1} \leqslant t \leqslant a_s, \quad s = 1, 2, \ldots, m \quad (a_0 = a)$$

равенством

$$u(t) = \sum_{k=s}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} \frac{(a_k-t)^{M-\lambda}}{(M-\lambda)!},$$

и притом $u(t) = 0$, если $t < a$ или $t > b$.

Таким образом мы получаем квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k) + \int_a^b \left\{ \frac{(b-t)^{M+1}}{(M+1)!} - u(t) \right\} f^{(M+1)}(t)\,dt, \tag{5}$$

которая верна для всякой функции $f(x)$, имеющей непрерывные производные в интервале $[a, b]$ до $(M+1)$-го порядка. Напомним, что коэффициенты $A_{k\lambda}$ определяются из разложения

$$\frac{1}{P(z)} \int_a^b \frac{P(z) - P(x)}{z - x}\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} \frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}.$$

Поступило
17 VII 1949