Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

АНАМОРФОЗА ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VII 1949)

В работе рассматривается вопрос об условиях, при которых заданная вещественная функция $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ $(n \geqslant 3)$ допускает анаморфозу, т. е. представление ее в виде

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv | f_{i1}(t_i); f_{i2}(t_i); \ldots; f_{in}(t_i) |, \qquad (1)$$

и указываются эффективные методы, позволяющие найти анаморфозу (1) в тех случаях, когда размерность [1] $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ равна n в отношении, по меньшей мере, одной из переменных.

Введем понятие о базисном разложении функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, о A-матрицах этой функции подобно тому, как это было сделано автором для случая полиномов [2].

Если $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ N-рациональная (в данной области G) по каждой из своих переменных t_i функция и системы функций

$$\varphi_{i1}(t_i); \varphi_{i2}(t_i); \ldots; \varphi_{ir_i}(t_i); \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (2)$$

ее линейно независимые системы образующих по t_i, то нетрудно показать, что существует единственное разложение данной функции по образующим систем (2), т. е. разложение вида

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \sum_{i_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{i_k=1}^{r_k} \varphi_{1i_1}(t_1) \ldots \varphi_{ki_k}(t_k) \alpha_{i_1 \ldots i_k}, \qquad (3)$$

где $\alpha_{i_1 \ldots i_k} \equiv \alpha_{i_1 \ldots i_k}(t_{k+1}, \ldots, t_n)$.

Если системы (2) являются базами по t_i [1], то разложение (3) будем называть базисным по $t_1, t_2, \ldots, t_k$, а при $k = n$ просто базисным.

Каждому линейному по t_1, t_2 разложению

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \varphi_{1i}(t_1) \varphi_{2j}(t_2) v_{ij}, \qquad (4)$$

где $v_{ij} \equiv v_{ij}(t_2, \ldots, t_n)$, приведем в соответствие матрицу $T^{(12)} = \| v_{ij} \|$, рассматриваемую как таблица с двойным входом, а именно

$T^{(12)}$	$\varphi_{11}(t_1)$	$\varphi_{12}(t_1)$	$\ldots$	$\varphi_{1r_1}(t_1)$
$\varphi_{21}(t_2)$	v_{11}	v_{21}	$\ldots$	$v_{r_1 1}$
$\varphi_{22}(t_2)$	v_{12}	v_{22}	$\ldots$	$v_{r_1 2}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$
$\varphi_{2r_2}(t_2)$	v_{1r_2}	v_{2r_2}	$\ldots$	$v_{r_1 r_2}$

(5)

где на пересечении i-го столбца и j-й строки стоит элемент v_{ij} — коэффициент при произведении $\varphi_{1i}(t_1)\,\varphi_{2j}(t_2)$ в разложении (4).

Матрицу $T^{(12)}$ назовем A-матрицей (матрицей анаморфозы) функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и базисной A-матрицей, если разложение (4) является базисным по t_1, t_2. Базисная A-матрица данной функции вполне определяется заданием элементов ее верхнего и левого входов.

Если заданы два линейных разложения (возможно, и не базисных) функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: разложение (4) с соответствующей ему A-матрицей $T^{(12)}$ (5) и разложение

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \bar{\varphi}_{1i}(t_1)\,\bar{\varphi}_{2j}(t_2)\,\bar{v}_{ij} \tag{4'}$$

с A-матрицей $\bar{T}^{(12)} = \|\bar{v}_{ij}\|$, причем элементы входов этих A-матриц связаны линейными соотношениями

$$\varphi_{1i} \equiv \sum_{l=1}^{r_1} c_{il}\bar{\varphi}_{1l} \quad (i = 1, \ldots, r_1), \tag{6}$$

$$\varphi_{2j} \equiv \sum_{m=1}^{r_2} b_{jm}\bar{\varphi}_{2m} \quad (m = 1, \ldots, r_2), \tag{6'}$$

где матрицы C и $\bar{B}$

$$C = \|c_{il}\| = \|c_{i1};\ c_{i2}; \ldots ; c_{ir_1}\|, \tag{7}$$

$$\bar{B} = \|b_{jm}\| = \|b_{j1};\ b_{j2}; \ldots ; b_{jr_2}\| \tag{7'}$$

неособенные с постоянными элементами, то

$$\bar{T}^{(12)} = BT^{(12)}C, \tag{8}$$

где B — матрица сопряжения с $\bar{B}$.

Две A-матрицы $T^{(12)}$ и $\bar{T}^{(12)}$, связанные соотношениями (6) и (6'), (8), назовем эквивалентными. Базисные A-матрицы $T^{(12)}$ и $\bar{T}^{(12)}$ данной функции всегда эквивалентны.

Отсюда нетрудно получить следующую теорему об условиях и способах отыскания анаморфоз функции $F(t_1, t_2, t_3)$ трех переменных: если функция $F(t_1, t_2, t_3)$ типа $[r_1; r_2; r_3]$ (т. е. размерности r_i по t_i) допускает анаморфозу, то $r_i \leqslant 3$; невырожденная функция $F(t_1, t_2, t_3)$ типа $[3; r_2; r_3]$ $(r_i \leqslant 3)$ тогда и только тогда допускает анаморфозу, если для какой-либо (а следовательно, и для каждой) базисной A-матрицы $T^{(12)}$ найдется такая неособенная матрица C с постоянными элементами, что произведение $T^{(12)}C$ является некоторой кососимметрической (при $r_2 = 3$) или усеченной кососимметрической (при $r_2 = 2$) матрицей.

Эта теорема, в частности, показывает, что все базисные A-матрицы M-функций $F(t_1, t_2, t_3)$ имеют ранг, равный двум.

Теорема об условиях анаморфозы функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ обобщается на случае $n > 3$ следующим образом: функция $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ типа $[n; r_2; \ldots, r_n]$ (невырожденная) тогда и только тогда допускает анаморфозу, если $r_i \leqslant n$ и если для каждой из $(n-1)$ заданных ее базисных A-матриц $T^{(1k)}$ $(k = 2, \ldots, n)$ найдется неособенная матрица C_k $(k = 2, \ldots, n)$ с постоянными элементами такая, что произведение $T^{(1k)}C_k = \bar{T}^{(1k)}$, где $\bar{T}^{(1k)}$ — некоторая кососимметрическая (при $r_k = n$) или усеченная кососимметрическая (при $r_k < n$) матрица.

Необходимость этого условия можно вывести из эквивалентности базисных A-матриц.

Что касается достаточности условия, то, допустив существование матриц C_k, дополним каждую из усеченных кососимметричных матриц $\overline{T}^{(1k)}$ до полной косой матрицы, взяв за недостающие элементы ее левого входа нули. Когредиентные преобразования элементов верхнего и левого входов полной A-матрицы $\overline{T}^{(1k)}$ не нарушают ее косой симметрии, и поэтому найдутся $(n-1)$ кососимметрических A-матриц вида

$$\begin{array}{c|ccccc}
\overline{T}^{(1k)} & f_{11} & f_{12} & \cdot & \cdot & f_{1n} \\
\hline
f_{k1} & 0 & F_{21}^{(k)} & \cdot & \cdot & F_{n1}^{(k)} \\
f_{k2} & -F_{21}^{(k)} & 0 & \cdot & \cdot & F_{n2}^{(k)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_{kn} & -F_{n1}^{(k)} & -F_{n2}^{(k)} & \cdot & \cdot & 0
\end{array} \tag{9}$$

с тождественными верхними входами.

Можно показать методом индукции, что из существования для функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ A-матриц (9) будет следовать тождество

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv c \mid f_{k1}; f_{k2}; \ldots; f_{kn} \mid, \tag{10}$$

где c — некоторая константа; с точностью до проективных преобразований эта анаморфоза — единственная ([1]).

Вещественная M-функция типа $[n; r_2; \ldots; r_n]$ всегда допускает вещественные анаморфозы. Это следует из того, что базисное разложение ее можно взять вещественным (приняв за базу, например, по t_1 функции семейства $F(t_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ([1])), а элементы матриц C_k, кососимметризующих A-матрицы $T^{(1k)}$, определяются из линейных однородных также вещественных уравнений. Эта теорема может и не иметь места для M-функции с размерностью меньше n по каждой из переменных.

Практически при отыскании анаморфозы (10) нет надобности находить элементы матриц C_k: матрицу $T^{(1k)}$ можно привести (если это возможно) к косому виду помощью элементарных преобразований над ее столбцами (с одновременными надлежащими изменениями элементов верхнего входа).

Так, в случае функции $F(t_1, t_2, t_3)$ с базисным разложением

$$\begin{aligned}
F(t_1, t_2, t_3) = f_{11}[f_{21}(2f_{31} + 2f_{32}) + f_{23}(f_{31} + 2f_{32})] + \\
+ f_{12}[f_{21}(f_{33} - 3f_{32}) + f_{22}(-f_{31} - 2f_{32}) + f_{23}(-f_{31} - 2f_{32})] + \\
+ f_{13}[f_{21}(-f_{33} + 3f_{32}) + f_{22}(-f_{31}) + f_{23}(-f_{31} - f_{33} + 3f_{32})]
\end{aligned} \tag{11}$$

имеем A-матрицу

$$\begin{array}{c|ccc}
T^{(12)} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\
\hline
f_{21} & 2f_{31} + 2f_{32} & f_{33} - 3f_{32} & -f_{33} + 3f_{32} \\
f_{22} & 0 & -f_{31} - 2f_{32} & -f_{31} \\
f_{23} & f_{31} + 2f_{32} & -f_{31} - 2f_{32} & -f_{31} - f_{33} + 3f_{32}
\end{array} \tag{12}$$

Нетрудно видеть преобразования, приводящие ее к косой симметрии и, следовательно, к анаморфозе

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \begin{vmatrix} f_{13} & f_{11} - f_{12} + f_{13} & f_{12} - f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} + 2f_{32} & 2f_{31} - f_{32} + f_{33} & -2f_{31} - 2f_{32} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Изложенный способ отыскания анаморфозы с помощью базисных A-матриц функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является эффективным, если имеется возможность практически находить базисное разложение (3) данной функции. Для случая аналитической функции можно указать следующий способ. Отыскание базы по t_1 функции приводится к выделению из семейства $F(t_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ максимального числа линейно независимых функций.

Пусть уже выделено k таких функций

$$F(t_1, \alpha^{(1)}), \quad F(t_1, \alpha^{(2)}), \ldots, F(t_1, \alpha^{(k)}) \tag{14}$$

и, следовательно, вронскиан W_k этих функций не равен тождественно нулю ([3]). Добавим к системе (14) данную функцию $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и составим вронскиан W_{k+1}. Если $W_{k+1} \equiv 0$, то размерность $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ по t_1 равна k и система (14) — база по t_1. Если $W_{k+1} \neq 0$ и $t_i = \alpha_i^{(k+1)}$ $(i = 2, \ldots, n)$ не является нулем W_{k+1}, то присоединим функцию $F(t_1, \alpha^{(k+1)})$ к системе (14), и т. д.

Пусть первый из вронскианов W, тождественно равный нулю, будет порядка $(r+1)$, тогда r — размерность $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ по t_1, и система

$$F(t_1, \alpha^{(1)}), \quad F(t_1, \alpha^{(2)}), \ldots, F(t_1, \alpha^{(r)}) \tag{14'}$$

ее база по t_1.

Эта задача для $F(t_1, t_2, t_3)$ была приведена Келлогом к решению линейного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами, одно только получение которого связано с практически неприемлемыми преобразованиями.

Все эти теоремы автором обобщены на случай бинарных анаморфоз, т. е. представлений вида

$$F(t_1, \tau_1, \ldots, t_n, \tau_n) \equiv | f_{i1}(t_i, \tau_i);\ f_{i2}(t_i, \tau_i);\ \ldots;\ f_{in}(t_i, \tau_i) |. \tag{15}$$

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
г. Свердловск

Поступило
6 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, 67, № 3 (1949). [2] П. В. Николаев, ДАН, 28, № 9 (1940). [3] Э. Гурса, Курс математического анализа, 2, ч. II, 1933, стр. 108. [4] Kellog, Zs. f. Math. u. Phys., 6 (1914).