Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. П. МАКАРОВ

УСЛОВИЯ СТРЕМЛЕНИЯ К НУЛЮ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 VII 1949)

Рассматривая систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t)\, x_k + \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $p_{ik}(t)$ — непрерывные функции времени t, удовлетворяющие, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 1$, при всех $t > t_1$ условиям, названным ранее [1] условиями А, найдем условия, которым должны удовлетворять функции $\varphi_i(t)$, для того, чтобы все решения системы (1) при неограниченном возрастании t стремились к нулю.

Перроном, развивавшим идеи А. М. Ляпунова [2], этот вопрос был рассмотрен для конечной системы с постоянными коэффициентами [3]. Им же рассмотрен случай конечной системы с треугольной матрицей и переменными коэффициентами [4] в предположении, что функции $p_{ik}(t)$ непрерывны и ограничены*. Перрон отыскивает при этом дополнительные условия, налагаемые на функции $p_{ik}(t)$, с тем, чтобы система обладала ограниченными и стремящимися к нулю решениями, независимо от выбора добавочных функций $\varphi_i(t)$, лишь бы они были непрерывными и ограниченными.

Введем следующие обозначения и определения:

$$1)\ D_k = D_k(t) = \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{kk}(t)\,dt\right] \int_{t_1}^{t} \varphi_k(t) \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{kk}(t)\,dt\right] dt,$$

$$2)\ D_{ab\ldots lmn} = D_{ab\ldots lmn}(t) =$$
$$= \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{nn}(t)\,dt\right] \int_{t_1}^{t} p_{nm}(t)\, D_{ab\ldots lm}(t) \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{nn}(t)\,dt\right] dt,$$

где индексы $a, b, \ldots, l, m$ подчинены неравенствам: $1 \leqslant a < b < \ldots$ $\ldots < l < m < n$.

$$3)\ \sum D^{(n)} = D_n + D_{1,n} + D_{2,n} + \ldots + D_{n-1,n} + D_{1,2,n} + D_{1,3,n} + \ldots$$
$$\ldots + D_{n-2,n-1,n} + \ldots + D_{1,2,3,\ldots,n}.$$

$$4)\ \bar{x}_{ks} = \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ss}(t)\,dt\right] \int_{t_1}^{t} \sum_{i=h}^{s-1} p_{si}(t)\, x_{ki}(t) \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{ss}(t)\,dt\right] dt.$$

* Условия А не требуют ограниченности функций $p_{ih}(t)$ снизу, подчиняя их ряду дополнительных условий.

5) Интегральную кривую

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \ldots$$

будем называть интегральной кривой, стремящейся к началу координат, если все функции $x_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, составляющие решение системы, стремятся к нулю при неограниченном возрастании t, т. е. если $\lim_{t\to\infty} x_k(t) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 1. *Если все коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* A *и если добавочные функции* $\varphi_k(t)$ *удовлетворяют при* $t > t_1$ *условию* B:

$$|\varphi_k(t)| \leqslant t^\lambda \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{kk}(t)\,dt\right],$$

где λ — *произвольно выбранное фиксированное число, то модули функций* $D_k(t)$ *удовлетворяют неравенствам*:

$$|D_k(t)| \leqslant \frac{1}{\lambda+1} t^{\lambda+1} \exp\left[\int_{t}^{t} p_{kk}(t)\,dt\right].$$

Справедливость леммы легко усматривается, если принять во внимание условия A и оценки модулей функций $\varphi_k(t)$.

Лемма 2. *Если выполняются условия леммы* 1 *и если, кроме того, числа* β_{ik}, *входящие в условия* A, *удовлетворяют неравенствам**:

$$\beta_{ik} > \lambda + 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1),$$

то модули функций $D_{kl\ldots prs}$ *удовлетворяют условиям*:

$$|D_{kl\ldots prs}| \leqslant \frac{A_{rs}}{\lambda+1} \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ss}(t)\,dt\right],$$

где $A_{rs} = A_{pr}\dfrac{1}{\beta_{rs} t^{\beta_{rs}}}$ *при* $A_{kl} = \dfrac{1}{(\beta_{kl} - \lambda - 1)\,t^{\beta_{kl}-\lambda-1}}$.

В самом деле,

$$|D_{kl}| = \left|\exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t} p_{lk}(t) D_k \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\left|\int_{t_1}^{t} \frac{\exp[\alpha_{lk}(t-t_1)]}{t^{1+\beta_{lk}}} D_k \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t} \frac{\exp[\,|p_{ll}(t_1) - p_{kk}(t_1)|\,(t-t_1)]}{t^{1+\beta_{lk}}} |D_k| \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t} \exp[\,|p_{ll}(t_1) - p_{kk}(t_1)|\,(t-t_1)] \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right] \times$$

* Выполнение этого требования всегда возможно в рамках условий A, так как сумма сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{\beta_{ik}}$ только уменьшится, если в первых его $i-1$ членах числа β_{ik} взять достаточно большими.

$$\times \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{kk}(t)\,dt\right]\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^{1+\beta_{lk}}}\,dt \leqslant \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t}\frac{t^{\lambda+1}}{(\lambda+1)\,t^{1+\beta_{lk}}}\,dt =$$

$$= \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\frac{1}{\lambda+1}\,\frac{1}{\beta_{lk}-\lambda-1}\left\{-\frac{1}{t^{\beta_{lk}-\lambda-1}}+\frac{1}{t_1^{\beta_{lk}-\lambda-1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{kl}}{\lambda+1}\exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right].$$

Присоединяя к индексам kl любую иную букву, например $m > l > k$, получим

$$|D_{klm}| = \left|\exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t} p_{ml}(t)\,dt\,D_k \exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t}\exp\left[\int_{t_1}^{t}[p_{mm}(t)-p_{ll}(t)]\,dt\right]\times$$

$$\times \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{ll}(t)\,dt\right]\exp\left[-\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right]\frac{A_{kl}}{\lambda+1}\,\frac{1}{t^{1+\beta_{ml}}}\,dt =$$

$$= \exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right]\int_{t_1}^{t}\frac{A_{kl}}{\lambda+1}\,\frac{dt}{t^{1+\beta_{ml}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{kl}}{\lambda+1}\,\frac{1}{\beta_{ml}t_1^{\beta_{ml}}}\exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right] = \frac{A_{lm}}{\lambda+1}\exp\left[\int_{t_1}^{t} p_{mm}(t)\,dt\right].$$

В доказательстве леммы использовано очевидное неравенство, вытекающее из условий А:

$$|p_{ll}(t_1)-p_{kk}(t_1)|\,(t-t_1) = \int_{t_1}^{t}[p_{ll}(t_1)-p_{kk}(t_1)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t}[p_{ll}(t)-p_{kk}(t)]\,dt, \quad \text{где } k < l.$$

Теорема. *Если коэффициенты системы* (1) *отвечают условиям* А, *если модули функций* $\varphi_i(t)$ *удовлетворяют условиям* В *и если числа* β_{ik} *в условиях* А *подобраны так, что* $\beta_{ik} > \lambda + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, i-1)$, *то все интегральные кривые системы, проходящие через точки, координаты которых образуют абсолютно сходящийся ряд, являются кривыми, стремящимися к началу координат при бесконечном возрастании* t.

Для доказательства теоремы построим, последовательно решая уравнения системы (1), матрицу ее решений, удовлетворяющих начальным условиям: $x_{ik}^{(1)} = 1$ при $i = k$; $x_{ik}^{(1)} = 0$ при $i \neq k$. k-я строка этой матрицы в принятых ранее обозначениях может быть представлена в общем виде следующими формулами:

$$x_{ki} = \bar{x}_{ki} + D_i \quad (i \neq k); \qquad x_{kk} = \bar{x}_{kk} + \sum D^{(k)},$$

где $\bar{x}_{ki}$ суть элементы k-й строки матрицы решений системы (1) в предположении, что $\varphi_i(t) \equiv 0$ ($\bar{x}_{ki} = 0$, если $i < k$).

Зададим постоянные C_k так, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$ был сходящимся, и образуем общее решение

$$x_k = \sum_{i=1}^{\infty} C_i x_{ki} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В принятых обозначениях это общее решение может быть представлено формулой

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} C_i \bar{x}_{ik} + D_k \sum_{i=1}^{\infty} C_i + \left\{\sum D^{(k)}\right\} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Рассматривая выражение для x_k, мы легко убеждаемся в справедливости теоремы, а именно:

а) модуль первого слагаемого $\sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{x}_{ik}$ стремится к нулю при неограниченном возрастании t, что непосредственно следует из асимптотической устойчивости по Ляпунову невозмущенного движения системы (1) в случае, когда $\varphi_i(t) \equiv 0$, что было доказано в предыдущей работе ([2]);

б) модуль слагаемого $D_k \sum_{i=1}^{\infty} C_i$ стремится к нулю при неограниченном возрастании на основании оценки, сделанной для $|D_k(t)|$ в лемме 1;

в) модуль величины $\left\{\sum D^{(k)}\right\} \sum_{i=1}^{\infty} C_i$, как это нетрудно видеть, также стремится к нулю при неограниченном возрастании t, так как число слагаемых первой суммы конечно для любого k и модуль каждого из них при неограниченном возрастании t стремится к нулю на основании леммы 2.

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} |x_k| \leqslant \lim_{t\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{k} C_i \bar{x}_{ik}\right| + \lim_{t\to\infty} |D_k| \left|\sum_{i=1}^{\infty} C_i\right| + \lim_{t\to\infty} \left|\sum D^{(k)}\right| \left|\sum_{i=1}^{\infty} C_i\right| = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\lim_{t\to\infty} |x_k| = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Приношу глубокую благодарность проф. В. В. Немыцкому за ряд ценных указаний.

Поступило
4 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Макаров, ДАН, 62, № 3 (1948). [2] А. М. Ляпунов, Общая задача устойчивости движения, 1935. [3] O. Perron, Math. Zs., 29, 129 (1928). [4] O. Perron, Math. Zs., 31, 159 (1929).