Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. И. ЕЛЬШИН

КАЧЕСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 VII 1949)

1. С каждым открытым интервалом

$$a < t < b, \tag{1}$$

не исключая случаев, когда $a = -\infty$ или $b = +\infty$, связывается функциональное пространство

$$R \equiv \{p, q\} \tag{2}$$

дифференциальных уравнений:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{3}$$

с непрерывными на (1) коэффициентами p и q.

В этой статье решаются качественные проблемы уравнения (3) в следующей формулировке: из пространства (2) выделить многообразие, на котором общее решение уравнения (3) на интервале (1) обладает заданными свойствами.

Решение этих проблем осуществляется с помощью характеристического оператора:

$$J[\theta; (p, q)] = \left(\theta - \frac{p}{2}\right)' + \theta^2 + q - \frac{p^2}{4}, \tag{4}$$

определенного в каждой точке (2), на множестве всех допустимых θ, непрерывных на интервале (1) и допускающих непрерывную производную для $\theta - \frac{p}{2}$.

Каждой проблеме соответствует определенное подмножество допустимых θ, на котором характеристический оператор дает функции характерного для этой проблемы поведения на интервале (1). Таким образом возникает возможность решать вопрос о принадлежности заданного конкретного уравнения к тому или другому многообразию и, в частности, решать по заданным коэффициентам $p(t)$ и $q(t)$ вопросы о колебаниях решений уравнения (3), об их ограниченности, асимптотическом поведении при $t \to b$ $(t \to a)$ и т. п.

2. Преобразование уравнения (3):

$$x = y \exp\left[\int_{t_0}^{t} \left(\theta - \frac{p}{2}\right) d\xi\right] \tag{5}$$

при любом допустимом θ дает:

$$y'' + 2\theta y' + J[\theta; (p, q)]\, y = 0. \tag{6}$$

Умножая (6) на

$$K[\theta] = \exp\left[2\int_{t}^{t} \theta\, d\xi\right], \tag{7}$$

приведем его к лагранжевой самосопряженной форме:

$$(Ky')' + Gy = 0, \tag{8}$$

где

$$G[\theta; (p, q)] = K[\theta]\, J[\theta; (p, q)]. \tag{9}$$

При любых непрерывных на интервале (1) $p(t)$ и $q(t)$ среди допустимых θ всегда существуют:
$\theta = \theta_1$, удовлетворяющие условию:

$$\left|\int_{t_0}^{c} K^{-1}\, d\xi\right| = \infty, \quad c = b \ \ (c = a); \tag{10}$$

$\theta = \theta_2$, определяемые равенством:

$$\theta_2 = \frac{p}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{p^2}{4} - q\right) d\xi + \int_{t_0}^{t} \psi\, d\xi, \tag{11}$$

где ψ — заданная положительная функция, непрерывная на интервале (1).

Для этих θ:

$$G[\theta; (p, q)] > 0 \quad (a < t < b). \tag{12}$$

И, наконец,

$$\theta_3 = \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2'}{x_1^2 + x_2^2}, \tag{13}$$

для которых

$$K[\theta_3]\, G[\theta_3; (p, q)] = 1, \tag{14}$$

при x_1 и x_2, образующих фундаментальную систему решений (3).

3. Обозначая

$$\omega = \pm (K[\theta_3])^{-1}, \tag{15}$$

из (14), (9) и (7) найдем квазидифференциальное уравнение для определения $\omega(t)$:

$$J\left[-\frac{\omega'}{2\omega};\ (p, q)\right] = \omega^2 \tag{16}$$

и приведем уравнение (8) к интегрируемому виду:

$$\left(\frac{y'}{\omega}\right)' + \omega y = 0. \tag{17}$$

Так как общий интеграл (17) имеет вид

$$y = C_1 \cos\left[\int_{t_0}^{t} \omega\, d\xi + C_2\right], \tag{18}$$

из (5) и (15) получаем общее решение уравнения (3):

$$x = \frac{C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p\, d\xi\right)}{\sqrt{|\omega|}} \cos\left[\int\limits_{t_0}^{t} \omega\, d\xi + C_2\right], \tag{19}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

После работы Боля ([1]), впервые представившего решение уравнения (3) при частных предположениях относительно коэффициентов в виде (19), выражения

$$\rho(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p\, d\xi\right)}{\sqrt{|\omega|}}; \qquad \varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \omega\, d\xi, \tag{20}$$

называются, соответственно, амплитудой и фазой, а функция $\omega(t)$ — переменной частотой. Если u и v — фундаментальная система решений уравнения (3) с начальными условиями при $t = t_0$: $u_0 = 1$, $u_0' = 0$, $v_0 = 0$, $v_0' = 1$, то общий интеграл квазидифференциального уравнения частот (16) имеет вид:

$$\omega(t) = \frac{A \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} p\, d\xi\right)}{(Au + Bv)^2 + v^2}, \tag{21}$$

где A и B — произвольные постоянные. Все частоты определены на интервале (1), непрерывны вместе со своей производной и не обращаются в нуль внутри этого интервала.

4. Для любых, непрерывных в (1) коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$ выбором частоты из (21) на одном из интервалов $a < t < \beta \leqslant b$ или $a \leqslant \alpha < t < b$ при достаточно малом C из уравнения:

$$\int\limits_{t}^{t+h_c(t)} \omega(\xi)\, d\xi = C\pi \quad (a < t + h_c(t) < b) \tag{22}$$

определяется непрерывная знакопостоянная функция $h_c(t)$, не равная нулю в интервале своего определения и имеющая на нем не менее двух непрерывных производных. Эту функцию я называю отрезком постоянства фазы (если $h_c(t) > 0$ — правый отрезок; если $h_c(t) < 0$ — левый отрезок). Отрезок постоянства фазы, соответствующий $C = \pm 1$, называется полуволной.

Дифференцируя (22), найдем:

$$\omega[t + h_c(t)]\,(1 + h_c'(t)) = \omega(t) \tag{23}$$

и, следовательно, $t + h_c(t)$ есть строго возрастающая функция t.

Если (19) имеет корни на интервале (1), то они определяются по формуле:

$$\varphi(t_n) + C_2 = \frac{\pi}{2} \pm n\pi, \tag{24}$$

где n — целое число или нуль.

Таким образом, если уравнение допускает полуволну, то среди его решений есть имеющие на интервале (1) не менее двух корней. Полуволна выражает расстояние между последовательными корнями: решение, имеющее корень при t, имеет следующим корнем $t + h_1(t)$. Полуволны (правая и левая), если они существуют, определяются уравнением (3) и не зависят от выбора частоты из (21); для всех частот имеет место равенство:

$$\int^{t+h_1(t)} \omega \, d\xi = \pm \pi. \tag{25}$$

В применении к полуволнам (23) не только выражает теорему о разделении корней линейно независимых решений (3), но и указывает общий закон изменения всего множества частот (21) уравнения (3) на интервале (1): при изменении аргумента на полуволну все частоты приобретают один и тот же множитель, причем частоты убывают, если полуволна возрастает, и наоборот.

Сопоставляя полученный закон изменения частоты с выражением (19), приходим к выводу, что основной отличительной чертой колебаний, описываемых уравнениями (3) с непостоянной полуволной, является зависимость амплитуды от закона колебаний.

5. Составляя уравнение (16) для уравнения (6), убеждаемся, что при любом допустимом θ оно совпадает с уравнением (16) для уравнения (3). Таким образом, множество частот (21) уравнения (3) вполне определяется его характеристическим оператором (4), а потому для исследования колебаний решений (3) уравнение может быть заменено любым допустимым (6). Если даже не исходить из более глубоких зависимостей, существующих между фазой (20) и точкой пространства (2), а пользоваться классическим методом сравнения, рациональный выбор θ дает возможность получить оценку полуволн (если они существуют) заданного уравнения (3) и решать вопросы о характере колебаний его решений.

При выборе θ, для которых уравнение (6) имеет ограниченное (неограниченное) общее решение, по формуле (5) можно судить об ограниченности (неограниченности) общего решения исходного уравнения.

Отсюда очевидны преимущества приведения уравнения (3) к виду (6) перед классическим приведением его к каноническому виду, получающемуся из (6) при $\theta = 0$: 1) не требуется существования $p'(t)$, необходимого для определения инварианта; 2) рациональный выбор θ открывает пути к эффективному решению качественных проблем.

Если задать $\omega = \omega(t)$ на интервале (1), то из (16) получим соотношение между $p(t)$ и $q(t)$, т. е. многообразие пространства (2), на котором $\omega(t)$ имеет данное поведение. Если же задано на (1) поведение амплитуды $\rho = \rho(t)$, то из (20) определяем частоту и из (16) получаем соответствующее многообразие пространства (2).

Если рассматриваемое уравнение определяет колебания, то полуволна, характеризующая их закон, в обоих случаях определяется из (25).

Поступило
7 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ P. Bohl, Crelles Journ., 131, 268 (1906).