Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. А. ГУСАРОВ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 VII 1949)

Целью этой заметки является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Если в уравнении*

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{1}$$

для всех $x \geqslant \bar{x}_0$ $b^2 \geqslant p(x) \geqslant a^2 > 0$, *где* a^2 *и* b^2 — *постоянные,* $p'(x)$ *непрерывна и ограниченной вариации, то все решения* (1) *для* $x \geqslant \bar{x}_0$ *ограничены.*

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty} p'(x) = 0$; поэтому найдется такое $\bar{x}_1 \geqslant \bar{x}_0$, что для $x \geqslant \bar{x}_1$

$$\frac{\pi}{a} \max_{\bar{x}_1 \leqslant x} |p'(x)| < \frac{a^2}{2}. \tag{2}$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — нули какого-нибудь нетривиального решения $y(x)$ уравнения (1), занумерованные в порядке возрастания, причем $x_1 \geqslant \bar{x}_1$. Промежутки $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$, определяемые двумя последовательными нулями $y(x)$, в которых $p(x)$ не сохраняет постоянного значения и которые содержат по крайней мере одну точку ξ, где $p(x)$ достигает относительного минимума, назовем, для краткости, мечеными.

Когда таких промежутков конечное число, то найдется такое $\bar{x}_2 \geqslant \bar{x}_1$, что для $x \geqslant \bar{x}_2$ $p(x)$ будет ограниченной вариации, а тогда, как известно ([1]), $y(x)$ будет ограниченным. Если меченых промежутков бесконечно много, то занумеруем их в порядке следования на числовой прямой: $[x_1^n, x_2^n]$, $n = 1, 2, \ldots$

Достаточно доказать, что производная в правых концах меченых промежутков ограничена, чтобы получить ее ограниченность во всех нулях $y(x)$. Этот факт простыми выкладками получается из соотношения ([1])

$$\frac{b}{a} \geqslant \frac{|y'(x_j)|}{|y'(x_{j+1})|} \geqslant \frac{a}{b}. \tag{3}$$

Из ограниченности $y'(x)$ во всех нулях и того, что $p(x) \geqslant a^2 > 0$, следует, что само решение $y(x)$ ограничено. Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть в уравнении*

$$z'' + \psi(x)z = 0, \tag{4}$$

где $\psi(x)=kx+b$, k *и* b — *постоянные;* $\psi(x)$ *положительная для всех* x, *входящих в рассмотрение;* $\bar{z}(x)$ — *решение уравнения* (4) *такое, что* $\bar{z}(x_1)=0$, $\bar{z}'(x_1)\neq 0$, x_2 — *нуль* $\bar{z}(x)$, *непосредственно следующий за нулем* x_1. *Пусть, далее,* $\bar{w}(x)$ — *решение уравнения*

$$w''+\theta^2 w=0, \quad где\ \theta^2=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\psi(x)dx. \tag{5}$$

Тогда x_2-x_1 *меньше или равно расстоянию между двумя соседними нулями решения* $\bar{w}(x)$ *уравнения* (5).

Доказательство. Будем предполагать, что $k\geqslant 0$; доказательство для $k\leqslant 0$ аналогично. Очевидно, за $\bar{w}(x)$ можно взять решение (5), для которого $\bar{w}(x_2)=0$, $\bar{w}'(x_2)=\bar{z}'(x_2)$. Полагаем для определенности $\bar{z}'(x_2)<0$. Доказательство для $\bar{z}'(x_2)>0$ аналогично. Допустим противное. Тогда, используя (4) и (5), простыми выкладками получаем:

$$\bar{w}'(x)\bar{z}(x)-\bar{z}'(x)\bar{w}(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}[\psi(x)-\theta^2]\bar{z}\bar{w}\,dx. \tag{6}$$

Выражение слева равно $\bar{z}'(x_1)\bar{w}(x_1)<0$, так как $\bar{w}(x_1)<0$, ибо $\theta^2\leqslant\psi(x)$ для $x_2\geqslant x\geqslant\frac{x_2+x_1}{2}$. Нетрудно показать, что правая часть (6) неотрицательна. Противоречие доказывает лемму.

Если в уравнении (4) $\psi(x)=kx+b\geqslant a^2>0$ для всех рассматриваемых значений x и $k\geqslant 0$, то для его решения $\bar{z}(x)$, для которого $\bar{z}(x_1)=0$, $\bar{z}'(x_1)\neq 0$ и x_2 нуль, непосредственно следующий за x_1, с помощью леммы 1 несложными рассуждениями доказывается, что

$$|\bar{z}(x)|\leqslant\frac{|\bar{z}'(x_2)|}{c}\sin c(x_2-x) \quad при\ x_1\leqslant x\leqslant x_2, \tag{7}$$

где постоянная $c\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x_1)+\psi(x_2))^{1/2}$ и такова, что решение уравнения $y''+c^2y=0$ имеет расстояние между нулями, равное x_2-x_1.

Из неравенства (7) и из равенства

$$[\bar{z}'(x_2)]^2-[\bar{z}'(x_1)]^2=\int_{x_1}^{x_2}\psi'(x)\,\bar{z}(x)\,dx \tag{8}$$

непосредственно находим:

$$[\bar{z}'(x_2)]^2\leqslant[\bar{z}'(x_1)]^2\left\{1+\frac{\psi(x_2)-\psi(x_1)}{2\psi(x_1)}\right\}. \tag{9}$$

Если же $k\leqslant 0$, а все другие условия и обозначения остаются теми же, что и для неравенства (7), то

$$|\bar{z}(x)|\geqslant\frac{|\bar{z}'(x_2)|}{c}\sin c(x_2-x), \tag{10}$$

$$[\bar{z}'(x_1)]^2-[\bar{z}'(x_2)]^2\geqslant\frac{[\bar{z}'(x_2)]^2[\psi(x_1)-\psi(x_2)]}{2c^2}. \tag{11}$$

Обозначим максимум $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ через $M[f(x);a,b]$, а минимум $f(x)$ через $m[f(x);a,b]$, колебание $f(x)$ через $\omega[f(x);a,b]$.

Лемма 2.

$$[y'(x_2^{i+1})]^2 \leqslant [y'(x_2^i)]^2 \exp\left\{\frac{3\pi}{a^3}\left(\omega[p'(x);\ x_2^i,\ x_2^{i+1}] \ln\left[\frac{b^2}{a^2}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{l_i+p+1} \omega[p'(x);\ x_r^i,\ x_{r+1}^i]\right)\right\}\left[\frac{p(x_2^{i+1})}{p(x_2^i)}\right]^{1/4}. \qquad (12)$$

Доказательство. Обозначим через $x_{k_i}^i$ наибольший из нулей $y(x)$ в промежутке $x_2^i \leqslant x \leqslant x_2^{i+1}$, меньший (или равный) всех значений x этого промежутка, при которых $p(x)$ принимает наибольшие в промежутке значения, а через $x_{l_i}^i$ — наименьший из нулей $y(x)$ в том же промежутке, больший (или равный) всех таких значений x.

Если два соседних нуля $y(x)$ x_r^i и x_{r+1}^i, $x_r^i < x_{r+1}^i$, попадают в отрезок $x_2^i \leqslant x \leqslant x_k^i$, то для нахождения зависимости между $y'(x_r^i)$ и $y'(x_{r+1}^i)$ рассматриваем для $x \geqslant x_r^i$, наряду с решением уравнения (1), решение $u(x)$ уравнения

$$u'' + \psi(x)u = 0, \quad \text{где } \psi(x) = p(x_r^i) + m[p'(x);\ x_r^i,\ x_{r+1}^i](x - x_r^i), \quad (13)$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x_r^i) = y(x_r^i)$, $u'(x_r^i) = y'(x_r^i)$.

Если $\bar{x}_{r+1}^i$ — первый нуль $u(x)$, следующий за x_r^i, то

$$[y'(x_{r+1}^i)]^2 \leqslant [u'(\bar{x}_{r+1}^i)]^2 + \frac{[u'(x_r^i)]^2}{\psi(x_1)}\omega[p'(x);\ x_r^i,\ x_{r+1}^i]. \qquad (14)$$

Действительно, написав равенство вида (8) для $[y'(x_r^i)]^2$ и $[y'(x_{r+1}^i)]^2$ для $[u'(x_r^i)]^2$ и $[u'(\bar{x}_{r+1}^i)]^2$, вычтем одно из другого и учитывая, что $m[p'(x);\ x_r^i,\ x_{r+1}^i] \geqslant 0$, получим (14). Применяя (9) к $u(x)$, из (14):

$$[y'(x_{r+1}^i)]^2 \leqslant [u'(x_r^i)]^2\left\{1 + \frac{\psi(\bar{x}_{r+1}^i) - \psi(x_r^i)}{2\psi(x_r^i)}\right\} \times$$

$$\times\left\{1 + \frac{1}{\psi(x_r^i)}\omega[p'(x);\ x_r^i,\ x_{r+1}^i](x_{r+1}^i - x_r^i)\right\}. \qquad (15)$$

Можно показать, что $\psi(\bar{x}_{r+1}^i) - \psi(x_r^i) \leqslant p(x_{r+1}^i) - p(x_r^i)$.

Учитывая, что $\psi(x_r^i) = p(x_r^i) \geqslant a^2 > 0$, $u'(x_r^i) = y'(x_r^i)$, неравенство (2), а также, что для любых двух соседних нулей $y(x)$ x_j и x_{j+1} $|x_{j+1} - x_j| \leqslant \pi/a$ и

$$\ln(1 + x) \leqslant x \quad \text{при } |x| < 1, \qquad (16)$$

и обозначая $\alpha_i = \frac{\pi}{a}M[p'(x);\ x_2^i,\ x_2^{i+1}]$, легко получим:

$$[y'(x_{r+1}^i)]^2 \leqslant [y'(x_r^i)]^2\left[\frac{p(x_{r+1}^i)}{p(x_r^i)}\right]^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_i}{2a^2}\right)} \exp\left(\frac{\pi}{a^3}\omega[p'(x);\ x_r^i,\ x_{r+1}^i]\right). \quad (17)$$

Если же два соседних нуля $x_{l_i+p}^i$ и $x_{l_i+p+1}^i$ решения $y(x)$ попадают в отрезок $x_{l_i}^i \leqslant x \leqslant x_1^{i+1}$, то, наряду с решением уравнения (1), рассматриваем для $x_{l_i+p}^i \leqslant x \leqslant x_{l_i+p+1}^i$ решение $v(x)$ уравнения

$$v'' + \varphi(x)v = 0, \qquad (18)$$

где $\varphi(x) = p(x_{l_i+p+1}^i) + m\left[p'(x);\ x_{l_i+p}^i,\ x_{l_i+p+1}^i\right](x - x_{l_i+p+1})$, удовлетворяющее условиям $v(x_{l_i+p+1}^i) = 0$, $v'(x_{l_i+p+1}^i) = y'(x_{l_i+p+1}^i)$.

Пользуясь равенством (8) для $v(x)$ и $y(x)$, неравенствами (10) и (11), путем, аналогичным тому, которым мы получили (17), находим

$$[y'(x_{l_i+p+1})]^2 \leqslant [y'(x^i_{l_i+p})]^2 \left[\frac{p(x^i_{l_i+p+1})}{p(x^i_{l_i+p})}\right]^{\left(\frac{1}{2}-\frac{{}^3/_2\alpha_i}{2a^2+\alpha_i}\right)} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\pi}{a^3}\omega\left[p'(x);\ x^i_{l_i+p},\ x^i_{l_i+p+1}\right]\right\}. \qquad (19)$$

В каждом из отрезков $x^i_r \leqslant x \leqslant x^i_{r+1}$, где $r = k_i, k_i+1, \ldots, l_i-1$, и в отрезке $x^{i+1}_1 \leqslant x \leqslant x^{i+1}_2$ есть по крайней мере одна точка, где $p'(x)=0$; поэтому, используя (3), (2) и (16), получим:

$$[y'(x^i_{r+1})]^2 \leqslant [y'(x^i_r)]^2 \exp\left\{\frac{\pi}{a^3}\omega\left[p'(x);\ x^i_r,\ x^i_{r+1}\right]\right\}, \quad r=k, k+1, \ldots, l_i-1$$

$$[y'(x^{i+1}_2)]^2 \leqslant [y'(x^{i+1}_1)]^2 \exp\left\{\frac{\pi}{a^3}\omega\left[p'(x);\ x^{i+1}_1,\ x^{i+1}_2\right]\right\}. \qquad (20)$$

Из (17), (19), (20) и условий теоремы элементарными выкладками получаем (12). Пользуясь (12), находим:

$$[y'(x^n_2)]^2 \leqslant [y'(x^1_2)]^2 \exp\left\{\frac{3\pi}{a^3}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\omega\left[p'(x);\ x^i_2,\ x^{i+1}_2\right]\right)\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{r=2}^{l_i+p_i+1}\omega\left[p'(x);\ x^i_r,\ x^i_{r+1}\right]\right)\right]\right\}\left[\frac{p(x^n_2)}{p(x^1_2)}\right]^{1/2}, \qquad (21)$$

где p_i — число нулей в последовательности $x^i_{l_i+1}, x^i_{l_i+2}, \ldots, x^{i+1}_1$.

Ряды $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{r=2}^{l_i+p+1}\omega\left[p'(x);\ x^i_r,\ x^i_{r+1}\right]\right]$ и $\sum_{i=1}^{\infty}\omega\left[p'(x);\ x^i_2,\ x^{i+1}_2\right]$ сходятся, ибо $p'(x)$ ограниченной вариации. При любом n $\left[\frac{p(x^n_2)}{p(x^1_2)}\right]^{1/2} \leqslant \left[\frac{b^2}{a^2}\right]^{1/2}$.

Отсюда последовательность $[y'(x^1_2)]^2, [y'(x^2_2)], \ldots, [y'(x^n_2)]^2, \ldots$ ограничена, и теорема доказана.

Из ограниченности $y'(x)$ в нулях $v(x)$, очевидно, следует, что $y'(x)$ ограничена для $x \geqslant \bar{x}_0$. Используя теорему, доказанную Белманом ([2]), получаем более общую теорему.

Если для коэффициента $q(x)$ уравнения $y''+q(x)y=0$, который удовлетворяет условиям существования решения для $x \geqslant \bar{x}_0$, найдется функция $p(x)$ такая, что $b^2 \geqslant p(x) \geqslant a^2 > 0$, $p'(x)$ непрерывна и ограниченной вариации для $\bar{x} \geqslant x_1 \geqslant \bar{x}_0$ и $\int_{x_1}^{\infty}|p(x)-q(x)|\,dx < \infty$, то все решения уравнения $y''+q(x)y=0$ ограничены.

Критерий ограниченности, доказанный В. М. Шепелевым ([1]), — а также критерий Фукухара и Нагумо ([3]) являются также частными случаями последней теоремы.

Пользуюсь случаем выразить благодарность чл.-корр. АН СССР В. В. Степанову за помощь и советы при написании статьи.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Шепелев, Прикл. мат. и мех., 3, 1 (1936). [2] R. Bellman, Duke Math. Journ., 10 (1943). [3] Fukuhara and Nagumo, Proc. Imp. Acad. of Japan, 6 (1930).