Доклады Академии наук СССР
1949. Том LXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. С. БРОДСКИЙ и М. С. ЛИВШИЦ

О ЛИНЕЙНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ, ИНВАРИАНТНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ СДВИГОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 VII 1949)

В настоящей заметке мы рассматриваем линейную функцию $A+\alpha B$ $(-\infty<\alpha<\infty)$ параметра α, коэффициенты A и B которой суть линейные операторы в гильбертовом пространстве H и которая инвариантна относительно группы сдвигов G параметра α в смысле равенства:

$$A+(\alpha+s)B=U^{-1}(s)(A+\alpha B)U(s)\quad(-\infty<\alpha<\infty), \tag{1}$$

где $U(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ — некоторое унитарное представление группы G в пространстве H.

Представляя $U(s)$ в виде $U(s)=e^{is\sigma}$, где σ — самосопряженный оператор, можно записать (1) в эквивалентной форме:

$$e^{-is\sigma}Ae^{is\sigma}=A+sB\quad(-\infty<s<\infty). \tag{2}$$

Отметим, что (2) формально эквивалентно равенству

$$[[A\sigma]\sigma]=0, \tag{3}$$

где $[A\sigma]=A\sigma-\sigma A$. Действительно, формальное разложение в ряд оператора $e^{-is\sigma}Ae^{is\sigma}$ имеет вид

$$e^{-is\sigma}Ae^{is\sigma}=A+is[A\sigma]+\frac{(is)^2}{2!}[[A\sigma]\sigma]+\frac{(is)^3}{3!}[[[A\sigma]\sigma]\sigma]+\ldots \tag{4}$$

Таким образом проводимое ниже изучение соотношения (2) дает также, с известной точки зрения, перечисление всевозможных решений коммутантного уравнения $[[A\sigma]\sigma]=0$. При заданном представлении $U(s)$ на операторы A и B мы накладываем следующие ограничения:

1. Области определения D_A и D_{A^*} операторов A и A^* плотны в H.
2. Из $x\in D_A$ следует $U(s)x\in D_A$.
3. B — ограниченный оператор, для которого 0 не является собственным значением.

Теорема. a) *Для того чтобы при заданном циклическом представлении $U(s)=e^{is\sigma}$ $(-\infty<s<\infty)$ существовала линейная, инвариантная относительно сдвигов функция $A+\alpha B$, удовлетворяющая условиям* 1, 2, 3, *необходимо и достаточно, чтобы для любого воспроизводящего элемента x_0 $(x_0\in H)$ функция $\sigma(t)=(E_tx_0,x_0)$, где E_t — спектральная функция оператора σ, была* *абсолютно непрерывной, а множество тех точек t, для которых $\sigma'(t) \neq 0$, было почти открытым*.*

б) *При выполнении условий пункта а) пространство H может быть реализовано как пространство функций $L_2(\mathfrak{M})$, имеющих суммируемый квадрат модуля на некотором открытом множестве $\mathfrak{M}$. Операторы σ, $U(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ и B при этом реализуются как операторы умножения на функции t, e^{ist} $(-\infty < s < \infty)$, $b(t)$, а операторы A и A^* будут связаны соотношением:*

$$\bar{g}Af - f\overline{A^*g} = \frac{d}{i\,dt}(bf\bar{g}) \quad (f, g \in L_2(\mathfrak{M})), \tag{5}$$

причем $bf\bar{g}$ для любых $f \in D_A$, $g \in D_{A^*}$ отличается от абсолютно непрерывной функции на множестве меры нуль.

в) *Обратно, из соотношения (5) следует (1). Из (5) следует также, что почти каждая точка множества $\mathfrak{M}$ может быть окружена окрестностью, в которой оператор A является квазидифференциальным оператором первого порядка.*

Лемма 1. *Если функции $v(t)$ и $w(t)$ имеют ограниченные вариации на $[-\infty, \infty]$, $\lim\limits_{t \to -\infty} v(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} w(t) = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, dv(t) = -i\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, dw(t)$ при любом вещественном α, то $w(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} v(s)\,ds$ при каждом значении t, являющемся точкой непрерывности функции $w(t)$.*

Лемма 2. *Если $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{s} f(t)\,g(t)\,d\sigma(t)$ абсолютно непрерывен при любых $f(t)$, принадлежащих некоторой плотной части D пространства $L_2^{(\sigma)}$, и при некоторой фиксированной функции $g \in L_2^{(\sigma)}$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{s} g(t)\,d\sigma(t)$ также абсолютно непрерывен.*

Переходим к доказательству необходимости условий пункта а) основной теории. Одновременно будут доказаны все утверждения пункта б).

Пусть E_t — спектральная функция циклического оператора σ, U — некоторый воспроизводящий элемент, $\sigma(t) = (E_t U, U)$. Если H' — пространство функций $\varphi(t)$ с нормой $\|\varphi\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d\sigma$, то, как известно, имеет место линейное и сохраняющее норму отображение пространства H на пространство H', определяемое равенством

$$f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t U. \tag{6}$$

При этом отображении оператор σ преобразуется в оператор умножения на независимое переменное t, а оператор B — в оператор умножения на некоторую ограниченную функцию $b(t)$, которую

* Т. е. отличалось от некоторого открытого множества на множество нулевой меры.

можно считать всюду отличной от нуля. Последнее следует из равенства $e^{i\alpha\sigma}B = Be^{i\alpha\sigma}$, которое легко получить, заменяя в (2) α на $-\alpha$ и сравнивая полученный результат с (2).

Перейдем к рассмотрению оператора A. Пусть $x \in D_A$, $y \in D_{A^*}$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — соответствующие функции из H'. Через φ^A, φ^B, ψ^{A^*}, ψ^{B^*} будем обозначать функции, соответствующие элементам Ax, Bx, A^*y, B^*y. Из (2) получим:

$$(e^{i\alpha\sigma}Ax, y) - (e^{i\alpha\sigma}x, A^*y) = -\alpha(e^{i\alpha\sigma}x, B^*y).$$

Используя (6), найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}(\varphi^A\overline{\psi} - \varphi\,\overline{\psi^{A^*}})\,d\sigma = -\alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\varphi\,\overline{\psi^{B^*}}\,d\sigma.$$

Введем следующие обозначения:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t}[\varphi^A(s)\overline{\psi(s)} - \varphi(s)\overline{\psi^{A^*}(s)}]\,d\sigma(s),$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi(s)\overline{\psi^{B^*}(s)}\,d\sigma(s).$$

Тогда

$$\lim_{t\to-\infty} v(t) = \lim_{t\to-\infty} w(t) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\,dv(t) = -\alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\,dw(t).$$

Из леммы 1 следует теперь, что в точках непрерывности функции $w(t)$

$$t\int_{-\infty}^{t} v(s)\,ds = w(t), \tag{7}$$

а так как, по определению функции $w(t)$, она непрерывна справа, то равенство (7) справедливо всюду.

Так как функция $w(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi\overline{\psi^{B^*}}\,d\sigma$ абсолютно непрерывна при любых $\varphi \in D_A$, $\psi \in D_{A^*}$, а совокупность функций $\overline{\psi^{B^*}}$ при всевозможных $\psi \in D_{A^*}$ плотна в H' (0 не есть собственное значение оператора B), то, по лемме 2, σ — абсолютно непрерывная функция. Таким образом,

$$i\int_{-\infty}^{t} v(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t}\varphi(s)\overline{\psi^{B^*}(s)}\,\sigma'(s)\,ds, \quad iv(s) = \varphi(s)\overline{\psi^{B^*}(s)}\,\sigma'(s),$$

$$i\int_{-\infty}^{s}[\varphi^A(t)\overline{\psi(t)} - \varphi(t)\overline{\psi^{A^*}(t)}]\,\sigma'(t)\,dt = \varphi(s)\overline{\psi^{B^*}(s)}\,\sigma'(s), \tag{8}$$

$$\varphi^A\overline{\psi}\sigma' - \varphi\,\overline{\psi^{A^*}}\,\sigma' = \frac{1}{i}(\varphi\overline{\psi^{B^*}}\,\sigma')'.$$

Последние три равенства выполняются почти всюду, причем последнее из них следует понимать в том смысле, что функция $\varphi\overline{\psi^{B^*}}\sigma'$ становится абсолютно непрерывной после некоторого переопределения на множестве меры нуль.

Если $\mathfrak{M}$ — множество точек, в которых $\sigma' \neq 0$, то из соотношения (8) следует, что $\mathfrak{M}$ — почти открытое множество.

Построим на множестве $\mathfrak{M}$ пространство $L_2(\mathfrak{M})$ функций $f(t)$ с нормой $\|f\|^2 = \int\limits_{\mathfrak{M}} |f|^2 dt$. Если $\varphi(t) \in H'$, то $f(t) = \varphi(t)\sqrt{\sigma'} \in L_2(\mathfrak{M})$,

причем

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 \sigma' \, dt = \int\limits_{\mathfrak{M}} |\varphi|^2 \sigma' \, dt = \int\limits_{\mathfrak{M}} |f|^2 \, dt = \|f\|^2.$$

Таким образом мы получаем линейное, сохраняющее норму отображение пространства H' на пространство $L_2(\mathfrak{M})$. При этом операторы σ и B остаются соответственно операторами умножения на t и $b(t)$, а из (8) получаем (5).

Для доказательства достаточности условий пункта а) заметим, что при выполнении этих условий пространство H и операторы σ, $U(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ можно реализовать, как указано в пункте б).

Обозначим через D совокупность абсолютно непрерывных функций $f = f(t)$ $(f \in L_2(\mathfrak{M}))$, обращающихся в нуль вне конечного интервала и таких, что $df/dt \in L_2(\mathfrak{M})$.

Определим операторы A и B равенствами

$$Af = \frac{1}{i}\frac{df}{dt}, \quad Bf = f \quad (f \in D).$$

Легко видеть, что функция $A + \alpha B$ инвариантна в смысле (1) и удовлетворяет условиям 1, 2, 3. Доказательство первого утверждения пункта в) теоремы получается непосредственно, если заменить в (5) f на $U(s)f = e^{ist} f$ и воспользоваться плотностью D_{A^*} в пространстве H.

Из этого последнего обстоятельства следует также и второе утверждение пункта в), если решить уравнение (5) относительно Af при фиксированном g.

Поступило
3 V 1949

Одесский педагогический институт
им. К. Д. Ушинского