Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVII, № 3

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Д. М. ТОЛСТОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ В ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ СДВИГА КАПИЛЛЯРНЫМ МЕТОДОМ В СЛУЧАЕ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 15 V 1949)

При экспериментальном исследовании структурно-механических свойств дисперсных систем в условиях стационарного потока капиллярный метод позволяет охватить наиболее широкий диапазон градиентов скорости. Затруднение в обработке результатов таких измерений заключалось в том, что формула Вейссенберга [1], позволяющая вычислять градиент скорости в функции напряжения сдвига, выведена для случая полного прилипания объекта к внутренней поверхности капилляра. Метод Вейссенберга, обработанный В. П. Павловым, однако, может быть обобщен и на случай пристенного скольжения.

Рассмотрим стационарный поток дисперсной системы, образующей пристенный слой, обедненный дисперсной фазой [2], текучесть которого является неизвестной функцией напряжения сдвига и отличается от текучести объекта в объемных слоях. На рис. 1 изображен характер распределения скоростей в этом случае.

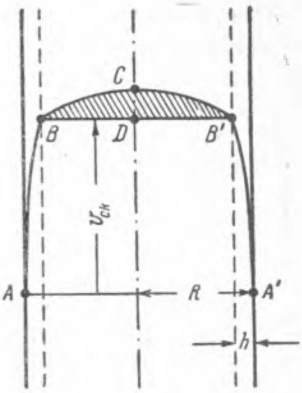

Рис. 1

Экспериментально измеряемый секундный расход $ABCB'A'$ слагается из неизвестного расхода BCB', обусловленного течением объемных слоев BB', и неизвестного расхода $ABDB'A'$, обусловленного пристенным „скольжением“. Обозначим их, соответственно, Q, $Q_{об}$ и $Q_{ск}$.

В случае, рассмотренном Вейссенбергом, $v_{ск}=0$, $h=0$ и $Q_{об}$ равно измеряемому расходу Q.

В общем же случае имеем:

$$Q = Q_{об} + Q_{ск}, \tag{1}$$

где

$$Q_{об} = \pi \int\limits_0^{DC} r^2 dv = -\pi \int\limits_0^{R-h} r^2 \frac{dv}{dr}\, dr, \tag{2}$$

$$Q_{ск} = \pi (R-h)^2 v_{ск} + 2\pi \int\limits_{R-h}^{R} vr\, dr. \tag{3}$$

Для стационарного ламинарного потока напряжение сдвига удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\tau}{r}=\frac{\tau_{R-h}}{R-h}=\frac{\tau_R}{R}=\frac{p}{2l}, \tag{4}$$

где p — перепад давления на отрезке капилляра круглого сечения длиной l.

Введем обозначение $-dv/dr=f(\tau)$ и заменим переменную интегрирования в (2), пользуясь соотношением (4). Тогда после преобразований получим:

$$Q_{об}=\pi\left(\frac{R-h}{\tau_{R-h}}\right)^3\int\limits_0^{\tau_{R-h}}\tau^2 f(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

или

$$\frac{Q_{об}}{\pi(R-h)^3}=D_{об}=\frac{1}{\tau^3_{R-h}}\int\limits_0^{\tau_{R-h}}\tau^2 f(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

где $D_{об}$ — величина, пропорциональная среднему градиенту скорости в объемных слоях, так как из (2) имеем: $-\left(\frac{dv}{dr}\right)_{ср}=f(\tau_{ср})=$ $=3\frac{Q_{об}}{\pi(R-h)^3}=3D_{об}$.

В уравнении (6) $f(\tau)$ относится к однородной (объемной) среде и потому непрерывна и инвариантна при изменении верхнего предела. Поэтому, как и в случае, рассмотренном Вейссенбергом, интеграл (6) при дифференцировании по верхнему пределу даст подинтегральную функцию от этого предела, и мы получим после преобразований

$$f(\tau_{R-h})=3D_{об}+\tau_{R-h}\frac{dD_{об}}{d\tau_{R-h}}. \tag{7}$$

В отличие от случая полного прилипания, искомая функция $f(\tau_{R-h})$ выражена здесь через неизвестные величины. Однако, налагая определенное ограничение на величину радиуса капилляра R, мы можем выразить эту функцию через величины, определяемые из опыта.

Если мы положим $h=0$, это будет равносильно внесению относительной ошибки в оценку R и τ_R, равной (принимая во внимание (4))

$$E=\frac{\Delta R}{R}=\frac{\Delta\tau_R}{\tau_R}=\frac{h}{R}.$$

Обозначив допустимую ошибку символом $E_д$, имеем

$$\frac{h}{R}\leqslant E_д,$$

откуда следует, что мы вправе полагать $h=0$, пользуясь капиллярами, радиус которых удовлетворяет условию:

$$R\geqslant\frac{h}{E_д}. \tag{8}$$

Допуская, например, $E_д=0{,}01$ и учитывая, что h в большинстве случаев не превышает 1 μ (2), мы имеем право в этих случаях пользоваться капиллярами радиуса $R\geqslant 100\ \mu$.

Ограничимся капиллярами, удовлетворяющими условию (8). Тогда, во-первых, имеем из (7):

$$f(\tau_R) = 3\,D_{об} + \tau_R \frac{dD_{об}}{d\tau_R}\,. \tag{9}$$

Далее, деля (1) на $\pi(R-h)^3$ и подставляя $Q_{ск}$ из (3), получим

$$\frac{Q}{\pi(R-h)^3} = \frac{Q_{об}}{\pi(R-h)^3} + \frac{v_{ск}}{R-h} + \frac{2\int\limits_{R-h}^{R} vr\,dr}{(R-h)^3}\,,$$

а с учетом условия (8) и обозначения (6),

$$D = D_{об} + \frac{v_{ск}}{R}\,, \tag{10}$$

где $D = Q/\pi R^3$ определяется из опыта. Однако $v_{ск}$ является неизвестной функцией от τ_R, так что уравнения (10) и (9) не позволяют определить $D_{об}$ и $f(\tau_R)$ из измерений с капилляром одного радиуса.

Формула (10) была получена В. П. Павловым для $h \to 0$ без рассмотрения пределов ее применимости и без заключения о возможности ее использования для нахождения $f(\tau_R)$.

Возможность нахождения $D_{об}$ вытекает из двух обстоятельств:

1) Если $f(\tau)$ — однозначная функция, то, как это непосредственно следует из (6),

$$D_{об} = \mathrm{const} \tag{11}$$

при $\tau_R = \mathrm{const}$ и не зависит от размеров капилляра, как это и предполагает В. П. Павлов.

2) Если бы $v_{ск}$ была также постоянной при $\tau_R = \mathrm{const}$, то, по предыдущему, зависимость D от $1/R$ (10) была бы линейной, и $D_{об}$ могло бы быть определено из двух измерений в капиллярах двух радиусов.

Однако постоянство $v_{ск}$ при $\tau_R = \mathrm{const}$ может и не соблюдаться. Действительно, изменяя R при $\tau_R = \mathrm{const}$, мы должны изменять градиент давления p/l так, чтобы $\tau_R = pR/2l = \mathrm{const}$. Обратная пропорциональность между p/l и R может привести к тому, что с ростом R скорость пристенного скольжения будет увеличиваться вследствие уменьшения нормального давления, зависящего от p/l.

Действительно, как показывают непосредственные измерения $v_{ск}$ ([2]), она уменьшается с ростом нормального давления. Но в то же время, как показывают те же измерения ([2]), скорость пристенного скольжения зависит главным образом от напряжения сдвига, и при конечных τ_R естественно *остается конечной* при неограниченном уменьшении давления, т. е. в данном случае при $R \to \infty$. Отсюда уравнение (10) дает:

$$\lim_{R\to\infty} D = D_{об} \quad \text{при } \tau_R = \mathrm{const}.$$

Следовательно, экстраполируя $D(1/R)$ до $1/R = 0$ при $\tau_R = \mathrm{const}$, мы получаем искомое $D_{об}$. Экстраполяция может быть сделана сколь угодно точной, для чего следует лишь брать достаточно широкий диапазон радиусов капилляров, расширяя его в сторону их увеличения. Если при этом кривая $D(1/R)$ проходит через начало координат, то $D_{об} = 0$, и имеет место только пристенное скольжение без течения в объеме.

Из (11) следует, что экстраполированное значение $D_{об}$ может быть отнесено к любому конечному радиусу капилляра при данном τ_R с учетом условия (8) и использовано для вычисления искомого истинного значения $f(\tau_R)$ по формуле (9) на основании одних лишь данных капиллярных измерений.

Таким образом, определение градиента скорости в функции напряжения сдвига капиллярным методом лимитируется не пристенным скольжением, а неоднозначностью $f(\tau)$ и, следовательно, $D_{об}$ (11). Поэтому к тиксотропным системам метод Вейссенберга применим только при условии предварительного разрушения структуры при напряжениях сдвига, превышающих их максимальное значение, достигаемое во время опыта, а также при условии, что восстановление структуры идет настолько медленно, что за время опыта $f(\tau)$ может считаться инвариантной.

Обобщение метода Вейссенберга на случай пристенного скольжения позволяет определять и скорость этого скольжения капиллярным методом. Для этого, ограничившись капиллярами, удовлетворяющими условию (8), можно вычислять $v_{ск}$ непосредственно из уравнения (10), где $D_{об}$ определено указанным выше способом.

Если же ограничиться областью напряжений $\theta_{прист} < \tau < \theta_{об}$, где $\theta_{прист}$ — предельное напряжение сдвига пристенного слоя, а $\theta_{об}$ — то же для объемных слоев, то $v_{ск}$ может быть вычислено по той же формуле (10), но уже без экстраполяции, так как в этом случае $D_{об} = 0$.

Московский станкоинструментальный институт
им. И. В. Сталина

Поступило
13 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Rabinowitsch, Zs. phys. Chem., **145**, 1, 1 (1929). [2] Д. М. Толстой, Колл. журн., **10**, 2, 133 (1948); Докл. всесоюзн. конф. по трению и износу маш., 3, 155 (1949).